This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

[illegible]en Aner-
kenn[illegible] [illegible]richtigsten
Frag[illegible] [illegible]hen Sinne
den I[illegible] [illegible], oder ob
nur [illegible] Bedeutung
haber[illegible] [illegible]erwartete
Antw[illegible] [illegible]nzip, und
seine[illegible] [illegible]n 38. Heft
der S[illegible]

[illegible]ohn.

QC
678
L372r

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig:

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung naturwissenschaftlicher u. mathematischer Einzeldarstellungen.

Bis jetzt erschienen:

1. Heft: **Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen** von **Mme. S. Curie** Übersetzt und mit Literaturergänzungen versehen von **W. Kaufmann** Dritte Auflage. Mit 14 Abbild. Preis ℳ 3,—, geb. ℳ 3,80.
2. Heft: **Die Kathodenstrahlen** von Prof. Dr. **G. C. Schmidt.** Zweite verbesserte u. verm. Auflage. Mit 50 Abbild. Preis ℳ 3,—, geb. ℳ 3,60.
3. Heft: **Elektrizität und Materie** von Prof. Dr. **J. J. Thomson.** Autorisierte Übersetzung von **G. Siebert.** Zweite verbesserte Auflage. Mit 21 Abbildungen. Preis ℳ 3,—, geb. ℳ 3,60.
4. Heft: **Die physikalischen Eigenschaften der Seen** von Dr. **Otto Freiherr von und zu Aufsess.** Mit 36 Abbild. Preis ℳ 3,—, geb. ℳ 3,60.
5. Heft: **Die Entwickelung der elektrischen Messungen** von Dr. **O. Frölich.** Mit 124 Abbild. Preis ℳ 6,—, geb. ℳ 6,80.
6. Heft: **Elektromagnetische Schwingungen und Wellen** von Prof. Dr. **Josef Ritter v. Geitler.** Mit 86 Abbild. Preis ℳ 4,50, geb. ℳ 5,20.
7. Heft: **Die neuere Entwickelung der Kristallographie** von Prof. Dr. **H. Baumhauer.** Mit 46 Abbild. Preis ℳ 4,—, geb. ℳ 4,60.
8. Heft: **Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie** von Prof. Dr. **A. Werner.** Zweite durchgesehene und vermehrte Auflage. Preis ℳ 9,—, geb. ℳ 10,—.
9. Heft: **Die tierischen Gifte** von Dr. **Edwin S. Faust.** Preis ℳ 6,—, geb. ℳ 6,80.
10. Heft: **Die psychischen Maßmethoden** von Dr. **G. F. Lipps.** Mit 6 Abbild. Preis ℳ 3,50, geb. ℳ 4,10.
11. Heft: **Der Bau des Fixsternsystems** von Prof. Dr. **Hermann Kobold.** Mit 19 Abbild. und 3 Tafeln. Preis ℳ 6,50, geb. ℳ 7,30.
12. Heft: **Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie** von Prof. Dr. **G. Jäger.** Mit 8 Abbild. Preis ℳ 3,50, geb. ℳ 4,10.
13. Heft: **Petrogenesis** von Prof. Dr. **C. Doelter.** Mit 1 Lichtdrucktafel und 5 Abbild. Preis ℳ 7,—, geb. ℳ 7,80.
14. Heft: **Die Grundlagen der Farbenphotographie** von Dr. **B. Donath.** Mit 35 Abbild. u. 1 farb. Ausschlagtafel. Preis ℳ 5,—, geb. ℳ 5,80.
15. Heft: **Höhlenkunde** mit Berücksichtigung d. Karstphänomene von Dr. phil. **Walther von Knebel.** Mit 42 Abbild. Preis ℳ 5,50, geb. ℳ 6,30.
16. Heft: **Die Eiszeit** von Prof. Dr. **F. E. Geinitz.** Mit 25 Abbild., 3 farbigen Tafeln und einer Tabelle. Preis ℳ 7,—, geb. ℳ 7,80.
17. Heft: **Die Anwendung der Interferenzen** in der Spektroskopie u. Metrologie von Dr. **E. Gehrcke.** Mit 73 Abbild. Preis ℳ 5,50, geb. ℳ 6,20.
18. Heft: **Kinematik organischer Gelenke** von Prof. Dr. **Otto Fischer.** Mit 77 Abbild. Preis ℳ 8,—, geb. ℳ 9,—.
19. Heft: **Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer** von Prof. Dr. **A. Wangerin.** Mit einer Textfigur und einem Bildnis Neumanns in Heliogravüre. Preis ℳ 5,50, geb. ℳ 6,20.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung naturwissenschaftlicher u. mathematischer Einzeldarstellungen.

20. Heft: **Die Zustandsgleichung der Gase u. Flüssigkeiten u. die Kontinuitätstheorie** v. Prof. Dr. **J. P. Kuenen.** Mit 9 Abb. Preis ℳ 6,50, geb. ℳ 7,10.

21. Heft: **Radioaktive Umwandlungen** von Prof. **E. Rutherford.** Übersetzt von **M. Levin.** Mit 53 Abbild. Preis ℳ 8,—, geb. ℳ 8,60.

22. Heft: **Kant und die Naturwissenschaft** von Prof. Dr. **Edm. König.** Preis geh. ℳ 6,—, geb. ℳ 7,—.

23. Heft: **Synthetisch-organische Chemie d. Neuzeit** von Prof. Dr. **Jul. Schmidt.** Preis ℳ 5,50, geb. ℳ 6,20.

24. Heft: **Die chemische Affinität und ihre Messung** von Dr. **Otto Sackur.** Mit 5 Abbildungen im Text. Preis ℳ 4,—, geb. ℳ 4,80.

25. Heft: **Die Korpuskulartheorie der Materie** von Prof. Dr. **J. J. Thomson.** Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. Mit 29 in den Text eingedruckten Abbildungen. Preis ℳ 5,—, geb. ℳ 5,80.

26. Heft: **Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffs in Natur und Technik** von Dr. **P. Vageler.** Mit 16 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. Preis ℳ 4,50, geb. ℳ 5,20.

27. Heft: **Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche** von Prof. Dr. **Joh. Bapt. Messerschmitt.** Mit 25 Abbildungen. Preis ℳ 5,—, geb. ℳ 5,80.

28. Heft: **Die Kraftfelder** von Prof. **V. Bjerknes.** Mit 29 Abbildungen. Preis ℳ 7,—, geb. ℳ 7,80.

29. Heft: **Physiologie der Stimme und Sprache** von Prof. Dr. **Hermann Gutzmann.** Mit 92 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln, zum Teil in Farbendruck. Preis geh. ℳ 8,—, geb. ℳ. 9,—.

30. Heft: **Die atmosphärische Elektrizität.** Methoden und Ergebnisse der modernen luftelektrischen Forschung von Prof. **H. Mache** und Prof. **E. v. Schweidler.** Mit 20 Abbildungen. Preis ℳ 6,—, geb. ℳ 6,80.

31. Heft: **Das Klimaproblem der geologischen Vergangenheit und historischen Gegenwart** von Dr. **Wilh. R. Eckardt.** Mit 18 Abbildungen und 4 Karten. Preis ℳ 6,50, geb. ℳ 7,10.

32. Heft: **Lichtbiologie.** Die experimentellen Grundlagen der modernen Lichtbehandlung, zusammengestellt von Dr. **Albert Jesionek,** Professor an der Universität Gießen. 1910. Preis ℳ 4,—, geb. ℳ 4,80.

33. Heft: **Die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Legierungen.** Von Prof. Dr. **Bernh. Dessau.** Mit 82 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. Preis ℳ 7,—, geb. ℳ 8,—.

34. Heft: **Die elektrische Fernübertragung von Bildern.** Von Dr. **Rob. Pohl.** Mit 25 Abbildungen. Preis ℳ 1,80, geb. ℳ 2,50.

35. Heft: **Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern.** (Leitung, Thermoelektrizität, Galvanomagnetische Effekte, Optik). Von Professor Dr. **K. Baedeker.** Mit 25 Abbildungen. Preis ℳ 4,—, geb. ℳ 4,80.

36. Heft: **Grundlagen der praktischen Metronomie.** Von Prof. Dr. **K. Scheel.** Mit 39 Abbildungen. 1911. Preis ℳ 5,20, geb. ℳ 6,—.

37. Heft: **Vergleichende Mond- und Erdkunde** von Prof. Dr. **S. Günther.** Mit 23 Abbildungen und 4 Tafeln. 1911. Preis ℳ 5,—, geb. ℳ 5,80.

Weitere Hefte in Vorbereitung. — Ausführliches Verzeichnis kostenlos.

DIE WISSENSCHAFT

SAMMLUNG
NATURWISSENSCHAFTLICHER UND MATHEMATISCHER
MONOGRAPHIEN

ACHTUNDDREISSIGSTES HEFT

DAS RELATIVITÄTSPRINZIP

VON

DR. M. LAUE
PRIVATDOZENT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MIT 14 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN
1911

DAS

RELATIVITÄTSPRINZIP

VON

DR. M. LAUE

PRIVATDOZENT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MIT 14 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN

1911

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Copyright, 1911, by Friedr. Vieweg & Sohn,
Braunschweig, Germany.

VORWORT.

In den $5\,^1/_2$ Jahren, welche seit Einsteins Begründung der Relativitätstheorie vergangen sind, hat diese Theorie in immer wachsendem Maße Beachtung gefunden. Freilich ist diese Beachtung nicht durchweg Zustimmung. Manche Forscher, darunter auch Träger sehr bekannter Namen, halten ihre empirische Begründung für nicht hinreichend fest. Bedenken dieser Art ist natürlich nur durch weitere Versuche abzuhelfen; immerhin legt das vorliegende Büchlein Wert auf den Nachweis, daß z. B. kein einziger empirischer Grund gegen diese Theorie vorhanden ist. Weit größer aber ist die Zahl derjenigen, welche sich mit ihrem gedanklichen Inhalt nicht befreunden können, denen namentlich die Relativität der Zeit mit ihren manchmal in der Tat recht paradox aussehenden Konsequenzen unannehmbar erscheint. Und hier ist vielleicht mit einer zusammenfassenden Darstellung der Theorie gedient, wie sie dies Büchlein geben will.

Freilich ist die einschlägige Literatur schon zu sehr angewachsen, als daß jede Veröffentlichung hätte berücksichtigt werden können. Sollte der Umfang nicht über das beabsichtigte Maß wachsen, so konnten manche wertvolle Untersuchungen nicht oder nur im Ergebnis aufgenommen werden. Dagegen dürfte in den grundlegenden Arbeiten von Einstein, Planck, Minkowski nichts von Belang enthalten sein, was nicht auch in der einen oder anderen

230613

Form in die gegenwärtige Darstellung übergegangen wäre. Eingehend berücksichtigt ist auch der mathematische Ausbau, den in jüngster Zeit Sommerfeld der Theorie gegeben hat. Neu dürfte die Behandlung der Dynamik (Abschnitt VII) sein, bei welcher der Einfluß der elastischen Spannungen auf den Impuls und die Energie, sowie die Transformation der Spannungen von einem Bezugssystem auf das andere in vollster Allgemeinheit untersucht werden.

Bei dem Leser setzt die Darstellung außer dem gebräuchlichen mathematischen Rüstzeug des theoretischen Physikers, der Infinitesimalrechnung und der Vektoranalysis [1]) nur noch eine gewisse Kenntnis der Maxwellschen Theorie voraus, deren wichtigste Gesetze übrigens in § 4 kurz abgeleitet sind. Die von Minkowski eigens für die Relativitätstheorie geschaffenen Methoden dagegen werden in den § 9 bis 13 entwickelt. Dabei habe ich mir, während ich mich sonst streng an die gebräuchlichen Bezeichnungen gehalten habe, manche Neuerung in der Bezeichnungsweise erlaubt. Das dabei zugrunde gelegte System wird, hoffe ich, zur Erleichterung des Verständnisses beitragen.

Bei der Korrektur unterstüzte mich in liebenswürdigster Weise Herr Dr. A. Rosenthal, dem ich dafür zu vielem Dank verpflichtet bin.

München, im Mai 1911.

Dr. M. Laue.

[1]) Eine kurze Rekapitulation der Vektorrechnung findet sich im Anhang.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Vorwort V
Inhaltsverzeichnis VII

I. Die Problemstellung.

§ 1. Die Relativitätsprinzipe der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik 1
§ 2. Die empirischen Grundlagen für die Elektrodynamik bewegter Körper 8
Induktion 8
Wilsonscher Versuch 9
Rowlandscher Versuch 9
Versuche von Röntgen und Eichenwald 10
Fizeauscher Versuch 10
Aberration 12
Dopplereffekt 12
Michelsonscher Versuch 13
Andere Versuche über den Einfluß der Erdbewegung 15
Dynamik des Elektrons 16

II. Die älteren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 3. Historische Übersicht 18
§ 4. Die Theorie von Heinrich Hertz 20
a) Ruhende Körper 20
b) Bewegte Körper 22
c) Der Wilsonsche Versuch 23
d) Der Eichenwaldsche Versuch 24
e) Der Fizeausche und Michelsonsche Versuch 25
f) Der Induktionsvorgang 26
g) Die Erhaltung des Impulses 26
§ 5. Die Elektronentheorie 26

Seite

III. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil.

§ 6. Die Lorentz-Transformation 33
§ 7. Die Einsteinsche Kinematik 40
§ 8. Minkowskis geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation 46
§ 9. Die Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung . . . 53

IV. Weltvektoren und -tensoren.

§ 10. Vierer- und Sechservektoren 60
a) Vierervektoren 61
b) Sechservektoren 64
§ 11. Die algebraischen Vektoroperationen 65
a) Addition und Subtraktion 65
b) Die skalare Multiplikation 66
c) Vektorprodukte 66
§ 12. Vektorielle Differentialoperationen 69
§ 13. Welttensoren 73

V. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip.

§ 14. Die Transformation des elektromagnetischen Feldes im leeren Raume 76
§ 15. Die Transformation der Kraftdichte, Energie und Impulssatz 79
a) Die Viererkraft 79
b) Der Welttensor T 82
c) Der Energiesatz 82
d) Die Erhaltung des Impulses 83
e) Die Erhaltung des Drehimpulses 85
f) Transformation der Energie, des Energiestromes und der Spannungen 86
§ 16. Anwendungen 89
a) Aberration und Dopplersches Prinzip 89
b) Die Reflexion am bewegten Spiegel 92
§ 17. Gleichförmige Bewegung geladener Körper 94
a) Das elektromagnetische Feld 94
b) Das Feld eines bewegten Elektrons 95
c) Die Rückwirkung des Feldes auf bewegte Träger von Ladungen 96
d) Energie und Impuls des Feldes 97
e) Beispiel des kugelförmigen Elektrons 98
f) Der Trouton-Noblesche Versuch 99

Seite

§ 18. Ungleichförmig bewegte Ladungsträger 99
a) Das Vierpotential 99
b) Die retardierten Potentiale 104
c) Die Hyperbelbewegung 105
d) Das Vierpotential bei der Hyperbelbewegung 108
e) Das elektromagnetische Feld bei der Hyperbelbewegung 111
f) Die Rückwirkung des Feldes auf das Elektron 112
g) Näherung für kleine Beschleunigung 114

VI. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper.

§ 19. Die Transformation der Feldgleichungen I bis IV 116
a) Die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ 116
b) Leitungs- und Konvektionsstrom 119
c) Die Invarianz der Elektrizitätsmenge 120
§ 20. Die Transformation der Gleichungen V bis VII 123
a) Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ 123
b) Elektromotorische Kraft und Leitungsstrom 125
§ 21. Anwendungen 126
a) Das Ohmsche Gesetz 126
b) Induktion 127
c) Grenzbedingungen 127
d) Der Wilsonsche Versuch 129
e) Der Eichenwaldsche Versuch 132
§ 22. Energie und ponderomotorische Kraft 135
a) Die Unzulänglichkeit der Maxwellschen Theorie . . . 135
b) Die Transformation beliebiger ponderomotorischer Kräfte 135
c) Die Bedeutung der Komponenten des Welttensors T . . 136
d) Anwendung auf die Elektrodynamik 138
e) Die Joulesche Wärme 139
§ 23. Der Strahlungsdruck 142

VII. Dynamik.

§ 24. Die mechanische Trägheit als Wirkung der Energie 147
a) Zweck und Ausgangspunkt der Betrachtungen 147
b) Impuls und Energie 149
c) Diskussion von XXVI 151
§ 25. Impuls, Energie und Spannung in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und dem inneren Zustand 153
a) Ableitung der Gleichungen 153
b) Diskussion 155
c) Vergleich mit der klassischen Mechanik 157

Seite

§ 26. Die Bedeutung der dynamischen Viererkraft F, und die absoluten und relativen Spannungen 158
§ 27. Beispiele für die quasistationäre, adiabatische, isopieistische Dynamik 162
a) Der Massenpunkt 162
b) Die Dynamik einer elektrisch geladenen Kugel 164
c) Körper mit beliebigen Spannungen 167
d) Vollständiges statisches System 168
§ 28. Thermodynamik 171
a) Transformation der Entropie 171
b) Transformation der Temperatur 172
c) Bestätigung von XXX 173
d) Das dynamische Potential H 175
e) Isotherm-isochore Dynamik 178
f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung 178
§ 29. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung 179
a) Die Hohlraumstrahlung in der Ruhe 180
b) Die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung . . 182
c) Isotherm-isochore Dynamik 183
d) Historische Bemerkungen 184
§ 30. Rückblicke und Ausblicke 184

Anhang.

a) Geometrische Bezeichnungen 189
b) Vektor- und Tensorbezeichnungen 189
c) Die verschiedenen Arten der Zeitdifferentiation 195
d) Bezeichnung und Maßsystem der physikalischen Größen 198

Literatur 201
Namenregister 206
Sachregister 207

I. Die Problemstellung.

§ 1. Die Relativitätsprinzipe der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik.

Die klassische Mechanik geht aus von dem Bewegungsgesetz des Massenpunktes, welches in vektorieller Schreibweise lautet:

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{q}) = \mathfrak{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hier bedeutet m die Masse, $\mathfrak{K}$ die Kraft, welche auf den materiellen Punkt wirkt, t die Zeit, $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit*). Der Geltungsbereich dieser Gleichung ist ein sehr bedeutender. Nicht nur die eigentliche Mechanik mit Einschluß der Elastizitätstheorie und Hydrodynamik fußt auf ihr, auch die Thermodynamik der Materie steht infolge der kinetischen Auffassung der Wärme mit ihr in engster Verbindung. Diese Gleichung erhält aber erst dadurch einen Inhalt, daß man das Koordinatensystem angibt, auf das sie sich bezieht. Dabei kommt es nicht auf die Lage des Anfangspunktes und die Richtung der Achsen an; haben wir ein passendes Koordinatensystem, so läßt eine Veränderung des Anfangspunktes oder der Achsenrichtungen die Vektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{K}$ und damit die Gleichung (1) unverändert. Es drückt sich hierin die Homogenität und Isotropie des Raumes aus, d. h. daß der Raum in allen seinen Punkten gleichwertig ist und keine mechanisch ausgezeichneten Richtungen hat. Nur der Bewegungszustand des Koordinatensystems muß gegeben sein, denn wenn sich zwei Systeme beliebig gegeneinander bewegen, so kann die Gleichung (1), wie eine leichte Rechnung zeigt, höchstens für das

*) Alle Bezeichnungen sind im Anhang nochmals zusammengestellt.

eine gelten, nicht einmal die erwähnte Homogenität und Isotropie bleiben beim Übergange von dem einen zum anderen gewahrt.

Für die meisten Zwecke ist es eine genügende Annäherung, das fragliche System mit der Erde fest verbunden zu denken; aber das Foucaultsche Pendel, dessen Schwingungsebene sich gegen die Erdoberfläche dreht, und die Abweichungen eines ohne Anfangsgeschwindigkeit fallenden Körpers von der Richtung des Lotes beweisen, daß es nur eine Annäherung ist. Dazu kommen als Gegenbeweise noch die bekannten geographischen und astronomischen Tatsachen, die Abplattung der Erde und die scheinbare tägliche Drehung des gesamten Fixsternsystems. Auch diese wären, auf das genannte System bezogen, mechanisch nicht zu verstehen. Man muß vielmehr, wie man schon vor Galileis Grundlegung der Mechanik einsah, ein anderes System zugrunde legen, in welchem der Schwerpunkt unseres Sonnensystems ruht, und dessen Achsenrichtungen durch die Richtungen nach sehr entfernten Fixsternen festgelegt sind. Es geschah das beim Übergang vom ptolemäischen zum kopernikanischen Weltsystem. Auf dies System beziehen die Astronomen ihre ausgedehnte Theorie der Planetenbewegung, und der Erfolg gibt ihnen recht, denn außer einigen wenigen Einzelheiten, deren Erklärung noch aussteht, hat sich diese Theorie in Übereinstimmung mit den Beobachtungen gezeigt.

Dennoch ist kaum anzunehmen, daß es „das ruhende System" ist; wenn, wie wir wohl voraussetzen dürfen, auch zwischen verschiedenen Planetensystemen die Gravitation wirkt, so muß das Fixsternsystem auf unser Sonnensystem eine Kraft ausüben, die seinen Bewegungszustand ändert. Tatsächlich sprechen auch Beobachtungen über die scheinbare Bewegung der Fixsterne dafür, daß das Sonnensystem sich mit einer Geschwindigkeit von $1{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ einem bestimmten Punkte im Sternbilde des Herkules nähert. Erwähnt sei schließlich noch, daß der Theorie der Bewegung der Doppelsterne nicht das genannte System zugrunde gelegt wird, sondern eins, welches im Schwerpunkt des betreffenden Sternsystems ruht und aus diesem Grunde gegen das erstgenannte eine manchmal recht beträchtliche Geschwindigkeit hat.

Diese letzte Bemerkung legt die Frage nahe, ob es überhaupt nur ein passendes Bezugssystem für die Mechanik gibt (Systeme,

welche sich nur durch den Anfangspunkt und die Richtung des Achsenkreuzes unterscheiden, zählen dabei nach dem Obigen als ein einziges). Wir sagten schon, daß von zwei beliebig gegeneinander bewegten Systemen höchstens das eine ein passendes sein kann. Untersuchen wir aber den speziellen Fall, daß ihre relative Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit ohne Drehung vor sich geht. Sind x, y, z die Koordinaten in dem einen, x', y' z' die in dem anderen System, legen wir ferner die x- und die x'-Achse beide parallel zu der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, welche der Nullpunkt des „gestrichenen" Systems x', y', z' gegen das „ungestrichene" x, y, z hat, so lauten die Transformationsgleichungen:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad \not{z}' = \not{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der Analogie mit der später auseinander zu setzenden Lorentz-Transformation wegen fügen wir noch die identische Transformation für die Zeit

$$t' = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

hinzu und bezeichnen die Gesamtheit dieser vier Gleichungen als eine Galilei-Transformation. Die Geschwindigkeitskomponenten finden wir, indem wir die Koordinaten eines Massenpunktes nach der Zeit differentiieren; es gelten daher nach (2) die Transformationsformeln:

$$\mathfrak{q}_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v = \mathfrak{q}_x - v,$$

$$\mathfrak{q}_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = \mathfrak{q}_y,$$

$$\mathfrak{q}_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = \mathfrak{q}_z$$

für die Geschwindigkeitskomponenten, die wir auch in die Vektorgleichung

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} - \mathfrak{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zusammenfassen können. Sie enthält das Additionstheorem der Geschwindigkeit. Durch nochmalige Differentiation folgt aus ihr die Transformationsgleichung der Beschleunigung:

$$\dot{\mathfrak{q}}' = \frac{d\mathfrak{q}'}{dt'} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \dot{\mathfrak{q}}.$$

In Gleichung (1) bleibt daher die linke Seite von der Transformation unberührt. Die Kraft aber ist eine Funktion der relativen Lage des Massenpunktes m zu anderen derartigen Punkten und eventuell auch seiner Relativgeschwindigkeit dagegen. Man sieht nun leicht, daß diese beiden Bestimmungsstücke bei einer Galilei-Transformation unverändert bleiben; dasselbe gilt daher auch für die Kraft, so daß die Gleichung

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

besteht. Haben wir also ein passendes Bezugssystem für die Grundgleichung der Mechanik, so gilt diese auch in allen denjenigen, welche sich aus dem ersteren durch eine Galilei-Transformation ableiten lassen. Diesen Satz bezeichnen wir aus später zu erörternden Gründen als das Relativitätsprinzip der Mechanik. Wir wollen gleich darauf hinweisen, daß die Gesamtheit aller Galilei-Transformationen eine Gruppe bildet; wendet man zwei von ihnen hintereinander an, so erhält man ein Resultat, das auch durch eine einzige zu erreichen wäre.

Es wird nun auch klar, weshalb die genannten Koordinatensysteme alle mit besserer oder schlechterer Annäherung brauchbar sind. Auf ihre translatorischen Geschwindigkeiten zu einem streng richtigen kommt es überhaupt nicht an, und ihre Beschleunigungen und Drehgeschwindigkeiten sind so gering, daß sie für die fraglichen Erscheinungen keine Rolle spielen.

Fragen wir, um einige Anwendungen dieses Prinzips zu geben, nach den Transformationsformeln für den Impulsvektor:

$$\mathfrak{G} = \Sigma m_i \mathfrak{q}_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und die kinetische Energie:

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m_i \mathfrak{q}_i^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

eines Systems von Massenpunkten m_i. Wenden wir die entsprechenden Gleichungen auf das gestrichene System an, so finden wir, daß nach (3):

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} - \mathfrak{v} \Sigma m_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$L' = L - (\mathfrak{v}\mathfrak{G}) + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} \Sigma m_i \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

ist. Wir können an ihnen eine Probe auf die Gleichwertigkeit beider Koordinatensysteme machen. Diese Gleichungen müssen nämlich (wie alle Transformationsgleichungen) in ihre Auflösungen nach den ungestrichenen Größen übergehen, wenn man die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen vertauscht und zugleich das Vorzeichen von v wechselt. In der Tat findet man aus (7) und (8):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{v} \Sigma m_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\,\text{a})$$

$$L = L' + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{G}') + \frac{v^2}{2} \Sigma m_i \quad \ldots\ldots \quad (8\,\text{a})$$

Dem Energieprinzip zufolge muß im ungestrichenen System die Zunahme der kinetischen Energie gleich der von den Kräften geleisteten Arbeit, d. h.

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma (\mathfrak{K}_i \mathfrak{q}_i)$$

sein, wobei $\mathfrak{K}_i$ die auf den Massenpunkt m_i wirkende Kraft ist. Im gestrichenen System gilt entsprechend:

$$\frac{dL'}{dt'} = \Sigma (\mathfrak{K}_i' \mathfrak{q}_i').$$

Da $\mathfrak{v}$ jede beliebige Richtung haben kann, so folgt (3), (4) und (8) leicht der Impulssatz:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \Sigma \mathfrak{K}_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Er enthält als Spezialfall eines Massenpunktes die Gleichung (1); man sieht also, daß man aus dem Energieprinzip und dem Relativitätsprinzip die Grundgleichung und damit die ganze Mechanik ableiten kann [1]).

Ganz ähnlich wie in der klassischen Mechanik liegen nun die Verhältnisse in der Elektrodynamik. Die Maxwellsche Theorie liefert für sie gewisse vektorielle Grundgleichungen, in denen die Differentialquotienten der Feldvektoren nach den Koordinaten und der Zeit vorkommen. Auch diese erhalten einen Sinn erst durch Angabe eines Bezugssystems. Da sie aber Differentialgleichungen sind, hat eine Verlegung des Anfangspunktes, da sie Vektorgleichungen sind, haben Änderungen der Achsenrichtungen keinen Einfluß auf ihre Form; alle Koordinatensysteme, welche durch diese Operationen auseinander hervorgehen, zählen hier wie in

der Mechanik als ein einziges. Aber der Bewegungszustand ist wesentlich; ebensowenig wie in der Mechanik können hier die Grundgleichungen für zwei beliebig gegeneinander bewegte Systeme gelten. Den Gegenstand des vorliegenden Heftes können wir daher in die folgenden Fragen zusammenfassen: Gibt es ein ausgezeichnetes Koordinatensystem, auf welches die Maxwellschen Gleichungen bezogen werden müssen? Oder, wenn es mehrere solcher Systeme gibt, wie lauten die Transformationsgleichungen, durch welche man von dem einen zu dem anderen gelangt? Diese letzteren würden dann für die Elektrodynamik eine ähnliche Rolle spielen, wie die Galilei-Transformation in der klassischen Mechanik.

Ist die erste Frage zu bejahen, so müssen sich Körper, welche sich gegen das ausgezeichnete System bewegen, offenbar in elektrodynamischer Beziehung prinzipiell anders verhalten, als solche, die in ihm ruhen. Es muß sich dann durch Versuche feststellen lassen, ob und wie sich ein Körper zu ihm bewegt, es muß also einen physikalischen Sinn haben, von der absoluten Bewegung eines Körpers zu reden*). Trifft dagegen die andere Möglichkeit zu, so müssen sich auch in einem bewegten Körper, wenn dieser nur in einem passenden System ruht, die Vorgänge — wenigstens von diesem System aus betrachtet — genau so abspielen, wie in einem ruhenden; es hat dann keinen physikalischen Sinn, von der Geschwindigkeit als etwas Absolutem zu reden. Ein Prinzip, welches das letztere behauptet, bezeichnet man daher passend als ein Relativitätsprinzip. (Aus diesem Grunde nannten wir auch den Satz auf S. 4 das Relativitätsprinzip der Mechanik.) — Die Entscheidung der gestellten Frage liegt offenbar bei Versuchen über die Elektrodynamik bewegter Körper.

Eng zusammen hängt damit die Frage nach der Existenz des Äthers. Ist die Faraday-Maxwellsche Auffassung von der Übertragung des elektromagnetischen Feldes durch einen

*) Daß die Erkenntnistheorie dem Begriff der absoluten Bewegung keinen Sinn zu geben weiß, spielt hier keine Rolle, denn wir haben auch unsere „absoluten“ Geschwindigkeiten in bezug auf ein Koordinatensystem definiert, dessen Festlegung auf empirischem Wege und zwar etwa so zu geschehen hätte, daß man die Bewegung der Planeten relativ zu ihm angibt.

materiellen Träger desselben auch für den leeren Raum richtig, so muß dasjenige Koordinatensystem ausgezeichnet sein, in welchem der Äther ruht. Stellt sich aber heraus, daß es viele gleichberechtigte Systeme gibt, so kann man offenbar keines davon mit mehr Recht als das im Äther ruhende betrachten, als jedes andere; es ist dann prinzipiell unmöglich, dem Äther einen bestimmten Bewegungszustand zuzuschreiben, man muß daher die Äthervorstellung ganz fallen lassen. So gerät die Relativitätsfrage in den engsten Zusammenhang mit der alten Streitfrage: Fernwirkung oder Übertragung mit endlicher Geschwindigkeit durch ein Zwischenmedium? Man sieht schon aus dieser Andeutung, wie tief die Frage in die Auffassung vom Wesen des elektromagnetischen Feldes eingreift.

Um aber ihre ganze Tragweite zu übersehen, wollen wir hier die Antwort zum Teil vorwegnehmen. Es wird sich zeigen, daß es in der Tat eine dreifach unendliche Schar verschieden bewegter Systeme gibt, welche für die Elektrodynamik gleichberechtigt sind. Aber diese Schar kann mit der durch das Relativitätsprinzip der Mechanik bestimmten nur ein einziges System gemeinsam haben. Wären beide Relativitätsprinzipe, das eine für die elektrodynamischen, das andere für die mechanischen Erscheinungen gültig, so definierten beide zusammen doch wieder ein ausgezeichnetes System; sie höben daher ihre Bedeutung gegenseitig auf. An Vorgängen, welche weder rein mechanische noch rein elektrodynamische sind — rein elektrodynamische gibt es überhaupt nur im leeren Raum, sonst sind immer irgend welche Körper mit ihren mechanischen Eigenschaften daran beteiligt —, müßte sich dann eine absolute Bewegung erkennen lassen *). Es kann daher in der ganzen Physik nur ein Relativitätsprinzip geben, wenn es diesen Namen wirklich verdienen soll.

Tatsächlich liegt aber gar kein Zwiespalt vor. Die mechanischen Versuche, einschließlich der astronomischen Beobachtungen, haben nämlich ausnahmslos mit so geringen Geschwindigkeiten zu

*) Besonders lehrreich dafür ist der Nachweis W. Wiens, daß sich die Erdgeschwindigkeit durch Messung der Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde parallel und entgegengesetzt der Erdgeschwindigkeit feststellen läßt, wenn für die Mechanik das Relativitätsprinzip der Galilei-Transformation gilt [2]).

tun, daß ihre Genauigkeit zur Entscheidung zwischen den beiden Relativitätsprinzipen nicht ausreicht. Wir kommen mit keinem empirischen Ergebnis in Widerspruch, wenn wir das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik auf die Mechanik übertragen. Das Umgekehrte wäre hingegen nicht möglich (§ 4). Es ist daher das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik, dem wir universelle Gültigkeit zuschreiben müssen, wenn wir nicht überhaupt auf ein solches verzichten wollen. Wir nennen es deswegen auch von jetzt an das Relativitätsprinzip schlechthin. Freilich bedürfen dann die Grundgleichungen der Mechanik einer Abänderung, und auch die Thermodynamik. Auch hierauf müssen wir am Schlusse dieses Buches eingehen, um die Vereinbarkeit der Relativitätstheorie mit den mechanischen Erfahrungen darzutun.

§ 2. Die empirischen Grundlagen für die Elektrodynamik bewegter Körper.

Gehen wir zunächst kurz auf das empirische Material ein, an dem wir eine elektromagnetische Theorie der bewegten Körper zu prüfen haben. Seitdem das Licht als elektromagnetische Erscheinung erkannt ist, versteht es sich von selbst, daß dazu auch optische Experimente gehören.

Induktion. Die bekanntesten Versuche dieser Art sind die Faradayschen Versuche über die Induktion elektrischer Ströme in geschlossenen, leitenden Bahnen bei der relativen Verschiebung solcher gegen Magnete oder andere Stromsysteme. Da jedes Lehrbuch der Experimentalphysik über sie ausführlich berichtet, dürfen wir uns hier mit der Angabe des Resultates begnügen. Unter der Annahme, daß der elektrische Widerstand eines Stromsystems eine durch Bewegung nicht zu beeinflussende Konstante ist, läßt es sich dahin aussprechen, daß das Linienintegral der elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}^*$ gegeben ist durch die zeitliche Änderung des magnetischen Induktionsflusses durch die umschlungene Fläche, d. h.*):

*) Alle Bezeichnungen, Vektor- und Tensorregeln sind im Anhang zusammengestellt; die letzteren zum Teil auch bewiesen. Die Gleichungen des Anhanges sind zum Unterschied von denjenigen des Textes mit griechischen Buchstaben α, β, γ usw. bezeichnet.

$$\int_{\lambda} \mathfrak{E}^* d s = -\frac{1}{c} \frac{d}{d t} \int \mathfrak{B}_n d \sigma$$

oder nach λ, σ, σ', da $div\, \mathfrak{B} = 0$ ist:

$$\int rot_n \mathfrak{E}^* d \sigma = -\frac{1}{c} \int \dot{\mathfrak{B}}_n d \sigma = -\frac{1}{c} \int \left(\dot{\mathfrak{B}}_n + rot_n [\mathfrak{B} \mathfrak{q}] \right) d \sigma.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf ein unendlich kleines Flächenstück liefert:

$$rot\, \mathfrak{E}^* = -\frac{1}{c} \left(\dot{\mathfrak{B}} + rot\, [\mathfrak{B} \mathfrak{q}] \right).$$

$\mathfrak{q}$ ist die auf dem Flächenstück $d \sigma$ herrschende Geschwindigkeit der Materie. Wie man sieht, ist der Bewegungseffekt von der ersten Ordnung, d. h. proportional zu dem Quotienten q/c.

Wilsonscher Versuch. In engem Zusammenhange damit steht ein von Wilson[1]) durchgeführtes Experiment über den Einfluß eines bewegten Dielektrikums. Bei ihm bewegt sich zwischen den leitend verbundenen Platten eines Kondensators parallel zu diesen eine planparallele, dielektrische, unmagnetisierbare Schicht in einem homogenen Magnetfelde von der Feldstärke $\mathfrak{H}$, welches zur Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ senkrecht, zu den Platten aber parallel ist. Beobachtet wird eine Aufladung der Platten von der Flächendichte $\pm (\varepsilon - 1) \frac{q}{c} \mathfrak{H}$. Schon früher hatte Blondlot[2]) den entsprechenden Versuch mit Luft gemacht; da ihre Dielektrizitätskonstante sich nur unmerklich von 1 unterscheidet, so fand er in Übereinstimmung mit dem Obigen keinen Effekt.

Während diese Versuche sich mit den elektrischen Folgeerscheinungen bei der Bewegung von Körpern im Magnetfelde beschäftigen, kommen wir jetzt zu solchen, welche die magnetischen Wirkungen von Bewegungen im elektrischen Felde untersuchen.

Rowlandscher Versuch. Schon die Bezeichnung „elektrischer Strom“ ist aus der Vorstellung entsprungen, daß sich in einem durchströmten Leiter Elektrizität bewegt, wie Wasser in einer Röhre. Ist sie richtig, so muß sich die Stromdichte $\mathfrak{Z}$ wie in der Hydrodynamik aus der Raumdichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ berechnen nach der Gleichung:

$$\mathfrak{Z} = \varrho\, \mathfrak{q}.$$

Ein elektrischer Strom hat aber ein Magnetfeld um sich. Rowland[3]) untersuchte nun, ob von Materie konvektiv mitgeführte Elektrizität die nach dieser Gleichung entsprechende magnetische Wirkung hervorruft, indem er eine elektrisch geladene Platte rotieren ließ. Der Versuch bestätigte das erwartete Ergebnis, welches neuerdings von Eichenwald[4]) nachgeprüft und als richtig befunden worden ist. Da nach den Maxwellschen Gleichungen (vgl, § 4)

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{Z}$$

ist, so ist auch hier die Wirkung proportional zu q/c.

Versuche von Röntgen und Eichenwald. Die Elektrizitätslehre kennt aber neben den „wahren" Ladungen, um die es sich beim Rowlandschen Versuch handelt, auch noch „scheinbare", d. h. durch die Polarisation des Dielektrikums vorgetäuschte, welche im elektrischen Felde überall dort auftreten, wo sich die Dielektrizitätskonstante stetig oder unstetig ändert. Zum Beispiel ist an den Grenzen eines Dielektrikums zwischen den geladenen Platten eines Kondensators die Dichte der scheinbaren Flächenladung gleich $\pm(\varepsilon - 1)\,|\mathfrak{E}|$. Die älteren Untersuchungen von Röntgen[5]) und die neueren und genaueren von Eichenwald[6]), bei welchen dies Dielektrikum rotierte, haben gezeigt, daß auch hier das Produkt aus der Dichte und Geschwindigkeit die Stromdichte eines äquivalenten Leitungstromes angibt. Dabei, wie auch beim Rowlandschen Versuch, ist freilich zu beachten, daß die Ladungen flächenhaft verteilt sind, und daß daher die Stromdichte auch als Dichte eines Flächenstromes, d. h. als Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch eine zur Stromrichtung senkrechte Längeneinheit hindurchfließt, zu deuten ist. Für die Theorie ist dieser Unterschied belanglos, da Flächenstrom und Flächenladung nur Grenzfälle räumlicher Ströme und Ladungen sind.

Fizeauscher Versuch. Damit ist die Reihe der Untersuchungen über die im engeren Sinne elektromagnetischen Wirkungen relativ zur Erde bewegter Körper beendet. Von den optischen besprechen wir zuerst den Fizeauschen Versuch über die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper. Wäre das Relativitätsprinzip der Mechanik gültig, so müßte die Lichtfortpflanzung im bewegten Körper geradeso mit der Geschwindigkeit c/n vor sich

gehen, wie im ruhenden; und nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten [Gleichung (3)] müßten die Phasen des Lichtes relativ zu einem Beobachter, gegen den der Körper die Geschwindigkeit q besitzt, mit einer Geschwindigkeit vom Betrage

$$c_r = \frac{c}{n} \pm q$$

fortschreiten, je nachdem die Lichtfortpflanzung in der Richtung von q oder entgegengesetzt erfolgt. Durch ein Experiment, bei welchem zwei Lichtstrahlen miteinander interferieren, welche beide eine strömende Flüssigkeit, der eine in der Bewegungsrichtung, der andere entgegengesetzt, durchsetzt haben, konnten Fizeau [7]) und später Michelson und Morley [8]) zeigen, daß die Geschwindigkeit q nicht ganz zu c/n hinzuzufügen ist, sondern versehen mit dem Fresnelschen Mitführungskoeffizienten $1 - 1/n^2$, so daß die obige Gleichung umzuändern ist in

$$c_r = \frac{c}{n} \pm q \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Bei Gasen, deren Brechungsexponent sich von 1 nur sehr wenig unterscheidet, ist infolgedessen überhaupt kein Einfluß zu bemerken. — Man hat diesen Versuch während eines halben Jahrhunderts als den direkten experimentellen Beweis für die Existenz eines die Körper durchdringenden, aber doch stets ruhenden Äthers angesehen. Denn wie sollte man ihn anders deuten, als daß nicht alles, was im Körper Träger der Lichtfortpflanzung ist, an der Geschwindigkeit desselben teilnimmt, solange man an das Additionstheorem (3) glaubte, welches die klassische Mechanik für die Geschwindigkeit aufstellt? Im Sinne der Relativitätstheorie dagegen bestätigt er nur das berühmte Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit.

Bei allen diesen Versuchen ist, wie wir sehen, der Effekt von der ersten Ordnung. Stets ist ihre wesentlichste Schwierigkeit in der Größe der Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}) begründet. Nun sind aber die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Erde um die Sonne bewegt ($q_e = 3 \cdot 10^6$ cm sec^{-1}), und ebenso die Geschwindigkeiten der anderen Himmelskörper weit größer, als alle diejenigen, welche wir Körpern relativ zur Erde geben können. Man muß daher weit leichter zu beobachtende Effekte erwarten, wenn man derartige Geschwindigkeiten benutzen kann.

Aberration. In der Tat liegen nun schon seit 1727 (Bradley) hierhergehörige astronomische Beobachtungen vor. Sieht man nach sehr entfernten Fixsternen in der Nähe des Poles der Ekliptik, so muß man die Richtung des Fernrohres (bezogen auf das Sonnensystem) im Laufe eines Jahres so ändern, als beschrieben diese Sterne am Himmel Kreise mit einem Durchmesser von $41'' = 2 \cdot 10^{-4}$ in absolutem Bogenmaß. Sterne in der Ekliptik durchlaufen scheinbar gerade Strecken von dieser Länge, alle anderen Ellipsen, deren große Achse diesen Betrag hat. Die elementare Erklärung dieser Tatsache (welche von den Brechungen im Fernrohr absieht) ist die, daß man das Fernrohr um einen Winkel q_n/c gegen die Richtung der Lichtstrahlen neigen muß, um diesen ungehinderten Durchgang zu gestatten; q_n ist die Geschwindigkeit der Erde senkrecht zum Lichtstrahl. Bemerkenswert ist die Unabhängigkeit dieses Winkels von dem Mittel, in welchem man beobachtet; er ändert sich nicht, wenn man das Fernrohr mit Wasser füllt (Airy [9]). Die Abweichung der Rohrrichtung von der Richtung nach dem gleichzeitigen Orte des Sterns ist aber keineswegs allein durch die Erdgeschwindigkeit bedingt, vielmehr überlagert sich dazu noch ein Effekt, welcher von der Bewegung der Lichtquelle abhängt, und der daher rührt, daß der Lichtstrahl von dem Orte herkommt, an welchem sie sich zur Zeit seiner Aussendung befand. Infolgedessen bildet der Strahl mit der Richtung nach dem gleichzeitigen Orte einen Winkel, dessen Größe durch die Geschwindigkeit der Lichtquelle senkrecht zum Strahl q_{in} bestimmt und zwar gleich $\frac{q_{in}}{c}$ ist. Die Abweichung zwischen Fernrohrachse und der letzteren Richtung hängt infolgedessen, wie eine einfache trigonometrische Betrachtung zeigt, nur von der Relativgeschwindigkeit der Erde zur Lichtquelle ab, und die Erscheinung der Aberration beweist deshalb nur, daß die Relativgeschwindigkeit sich im Laufe eines halben Jahres um den Betrag $2\,q_e/c = 2 \cdot 10^{-4}$ ändert, lehrt aber nichts über den Bewegungszustand der Erde zum „Äther".

Dopplereffekt. Eine zweite, auch schon seit 1850 bekannte Beobachtung dieser Art ist der Dopplereffekt. Wie sich spektroskopisch durch die Verschiebung der Emissions- oder Absorptionslinien im Spektrum der Fixsterne nachweisen läßt, wird die Schwingungszahl des Lichtes durch die der Entfernung

parallele Komponente der Relativgeschwindigkeit zwischen Erde und Lichtquelle (q_r) um den Faktor $(1 + q_r/c)$ geändert. Die elementare Erklärung dafür ist, daß die Zahl der Lichtwellen, welche pro Zeiteinheit in unser Auge gelangen, vergrößert wird, wenn wir uns ihr nähern, verkleinert, wenn wir uns von ihr entfernen. Das akustische Analogon dieser Erscheinung ist hinreichend bekannt. — Der Dopplereffekt ist von der größten Wichtigkeit für die Astronomie zur Erkennung der in sehr entfernten Doppelsternsystemen stattfindenden Bewegungen. Die Physik verdankt ihm den experimentellen Nachweis, daß die bei der Entladung in verdünnten Gasen auftretenden Kanalstrahlen bewegte Korpuskeln sind (Stark[10]). Neuerdings ist es auch gelungen, ihn durch Bewegung eines Spiegels relativ zur Erde nachzuweisen (Galitzin[11]).

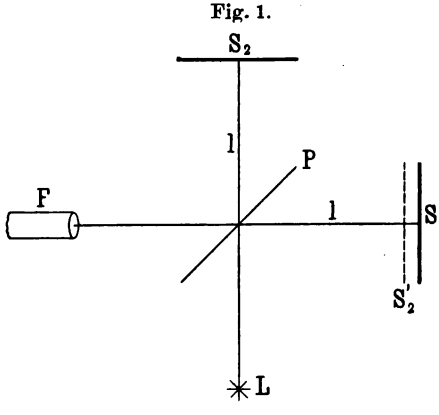
Michelsonscher Versuch[12]). Bei allen bisher beschriebenen Experimenten hängt der Erfolg von der ersten Potenz des Verhältnisses q/c ab; die Genauigkeit ist zu gering, um über Glieder höherer Ordnung Rechenschaft zu geben. Im Gegensatz dazu handelt es sich beim Michelsonschen Versuch um einen Effekt zweiter Ordnung. Gerade hierauf beruht seine Bedeutung. Denn die anderen Beobachtungen konnte z. B. auch die Lorentzsche Theorie des ruhenden Äthers erklären; der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches dagegen zwang sie zu einer neuen, schon zur Relativitätstheorie hinüberleitenden Hypothese. So wurde dieser Versuch geradezu der Fundamentalversuch für die Relativitätstheorie; wie man auch von ihm fast unmittelbar zur Ableitung der das Relativprinzip enthaltenden „Lorentz-Transformation“ gelangt (§ 6). Diese große Bedeutung mag eine eingehendere Beschreibung rechtfertigen; immerhin gestatten wir uns auch so noch vielerlei idealisierende Vereinfachungen.

Zunächst denken wir uns den Apparat in Ruhe. Der Lichtstrahl L (Fig. 1, s. S. 14) trifft unter 45° Einfallswinkel auf eine sehr dünne, halbdurchlässig versilberte Glasplatte P; er wird zum Teil gespiegelt, zum Teil hindurchgelassen. Der gespiegelte Strahl trifft senkrecht auf einen Spiegel S_1, der andere ebenso auf einen Spiegel S_2, S_1 und S_2 befinden sich in nahezu gleichem Abstande l von P. Beide Strahlen kehren dann auf den Wegen, auf welchen sie gekommen sind, nach P zurück und erfahren hier wiederum Spiegelung und Brechung. Je ein gespiegelter

und ein gebrochener Strahl überdecken sich jetzt und geben dabei zu Interferenzerscheinungen Anlaß, von denen man die eine in der Brennebene des Fernrohres F beobachtet.

Fragen wir nach der Gestalt der Streifen. Für das Interferenzphänomen ist alles so, als wäre der eine der interferierenden Strahlen nicht an S_2, sondern an dem Spiegelbilde S_2' von S_2 an P reflektiert. Da S_1 nach den obigen Annahmen zu S_2' parallel ist, sieht man das bekannte System von konzentrischen Ringen, wie es an planparallelen Platten entsteht. Dreht man aber den Spiegel S_1 ein wenig aus seiner bisherigen Lage heraus, so verschwinden die Planparallelitätsringe, dafür treten gerade, äquidistante Interferenzstreifen gleicher Dicke auf, wenn man das Fernrohr auf S_2' einstellt. Diesen Apparat bezeichnet man als Michelsonsches Interferometer.

Fig. 1.



Denken wir uns nun diese Anordnung parallel dem Strahl PS_1 in Bewegung gesetzt und sie so eingerichtet, daß der Strahlengang relativ zu dem mitbewegten System (Erde) der gleiche bleibt. Die Relativgeschwindigkeit des Lichtes c_r ist nach (3) die Vektorsumme aus der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum und der Erdgeschwindigkeit q; also in dem Falle, daß beide in der Richtung miteinander zusammenfallen oder entgegengerichtet sind,

$$c_r = c \pm q,$$

im Falle, daß c_r senkrecht zu q steht,

$$c_r = \sqrt{c^2 - q^2}.$$

Die Strecke $PS_1 = l$ wird also von P nach S_1 in der Zeit $\frac{l}{c+q}$, umgekehrt in der Zeit $\frac{l}{c-q}$ durchlaufen, hin und zurück daher in der Zeit

$$t_1 = l\left(\frac{1}{c+q} + \frac{1}{c-q}\right) = \frac{2cl}{c^2-q^2} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{q^2}{c^2} + \cdots\right) \quad (10)$$

Die Strecke PS_2 dagegen legt das Licht in beiden Richtungen in der Zeit

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-q^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2} + \cdots\right) \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

zurück. Die Differenz

$$t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \cdot \frac{q^2}{c^2}$$

ist bestimmend für die Lage der Interferenzmaxima und -minima. Dreht man nun den Apparat in seiner Ebene um 90°, so vertauschen die Strahlen PS_1 und PS_2 ihre Rollen, die Differenz ihrer Durchlaufungszeiten wird also

$$t_1 - t_2 = -\frac{l}{c}\frac{q^2}{c^2}.$$

Es müssen sich daher bei der Drehung die Streifen verschieben, und zwar ist die Verschiebung, gemessen in Bruchteilen eines Streifenabstandes, gleich der Änderung von $(t_1 - t_2)$, dividiert durch die Periode τ des Lichtes, also gleich

$$\frac{2l}{c\tau}\frac{q^2}{c^2} = \frac{2l}{\lambda}\frac{q^2}{c^2},$$

wo $\lambda = c\tau$ die Wellenlänge ist.

Trotz der Kleinheit von q^2/c^2 ($= 10^{-8}$) konnte die Genauigkeit des Versuches durch Vergrößerung der Strecke l bis auf $3{,}2 \cdot 10^3$cm (l/λ rund $= 10^8$) schließlich so weit getrieben werden, daß ein Hundertstel der erwarteten Verschiebung hätte wahrgenommen werden müssen, trotzdem zeigte sich keine Spur einer solchen; es ist durchaus so, als pflanzte sich das Licht trotz der Bewegung längs der Strecken PS_1 und PS_2 stets mit der gleichen Geschwindigkeit fort.

Andere Versuche über den Einfluß der Erdbewegung. Nur nebenbei soll hier erwähnt werden, daß Trouton und Noble [13]) vergeblich nach einem von der Lorentzschen Theorie vorausgesagten, zu q^2/c^2 proportionalen Drehmoment gesucht haben, welches ein geladener Plattenkondensator infolge

der Bewegung erfahren sollte *). Ebenso ergebnislos verliefen die Versuche einer Reihe von Physikern [14]), eine Doppelbrechung der Körper, Änderungen der Rotationspolarisation und des Spiegelungs- und Brechungsvorganges als Folgen der Erdbewegung nachzuweisen. Nach Des Coudres [15]) ist ferner kein Einfluß davon auf die Induktionserscheinungen, nach Trouton und Rankine [16]) keine Änderung der Stromverteilung zu bemerken, wenn man eine Wheatstonesche Brücke verschieden gegen die Erdgeschwindigkeit orientiert. Die Liste der Experimente, bei welchen nach einem Einfluß der Erdbewegung gesucht wurde, ließe sich sogar noch erheblich verlängern. Bei keinem hat sich das Gesuchte beobachten lassen, und darin liegt die festeste Stütze für die Überzeugung von der Existenz eines Relativitätsprinzips. Freilich muß man ja bei der Verallgemeinerung negativer Erfahrungen sehr vorsichtig zu Werke gehen; kann doch ein einziger Versuch mit positivem Ergebnis sie als unzulässig erweisen. Dennoch stützt sich der allgemeine feste Glaube an die Gültigkeit der beiden Hauptsätze der Thermodynamik auch auf keine sicherere Basis, als die Häufung gewisser negativer Erfahrungen, daß es nämlich auf keine Weise gelingt, ein Perpetuum mobile erster oder zweiter Art zu konstruieren. Und wenn sich die Zahl der vollgültigen Experimente in unserem Falle auch nicht mit derjenigen Fülle exakter Versuche messen kann, die in den beiden anderen Fällen vorliegt, so bilden sie doch immerhin schon eine Instanz von erheblichem Gewicht.

Dynamik des Elektrons. Zum Schluß müssen wir noch auf eine hochinteressante, wenn auch wohl noch nicht abgeschlossene Reihe von Versuchen über die Dynamik des Elektrons eingehen. In den Kathodenstrahlen bewegen sich bekanntlich die freien Atome der negativen Elektrizität, die sog. Elektronen. Dieselben bilden auch einen Teil der von radioaktiven Substanzen ausgehenden Strahlung (β-Strahlen) und treten außerdem bei der Bestrahlung von Metallen mit ultraviolettem Licht aus diesen heraus. Ihre Geschwindigkeit kommt in den β-Strahlen nahe an die des Lichtes heran, doch kann man auch die bei den Kathodenstrahlen und den lichtelektrischen Vorgängen auftretenden Elek-

*) Die Theorie dieses Versuches kann erst später (in § 17 f) gegeben werden.

tronen durch elektrische Felder bis über die halbe Lichtgeschwindigkeit beschleunigen (Hupka).

Ein bewegtes Elektron repräsentiert eine elektrische Strömung; es ist gemäß dem Rowlandschen Versuch von einem magnetischen Feld umgeben, dessen Stärke mit der Geschwindigkeit wächst. Ändert man die letztere nach Größe oder Richtung, so übt dies Feld eine der Selbstinduktion eines Stromes ähnliche Wirkung aus, welche sich als Widerstand gegen die Beschleunigung, d. h. als Trägheit des Elektrons äußert, so daß man diesem, auch wenn ihm wirkliche Masse fehlt, wie zurzeit allgemein angenommen wird, eine „elektromagnetische Trägheit" zuzuschreiben hat (§ 18). Nur ist diese Trägheit nicht einer skalaren Masse äquivalent. Vielmehr ist die Trägheit gegenüber einer Beschleunigung in der Bewegungsrichtung eine andere, als wenn diese auf der Geschwindigkeit senkrecht steht. Man unterscheidet deshalb die „longitudinale" von der „transversalen" Masse.

Soweit stimmen alle Theorien für die Dynamik des Elektrons überein, doch unterscheiden sie sich in quantitativer Beziehung. Nach der Lorentzschen Theorie ist, wie Abraham[17]), Schwarzschild[18]) und Sommerfeld[19]) zeigten, die longitudinale Masse

$$m_l = m\,\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{q^2}\left[\frac{2\,c^2}{c^2-q^2} - \frac{c}{q}\,lg\left(\frac{c+q}{c-q}\right)\right],$$

die transversale Masse

$$m_t = m\cdot\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{q^2}\left\{\left[\frac{c^2+q^2}{2\,c\,q}\,lg\left(\frac{c+q}{c-q}\right)-1\right]\right\};$$

nach dem Relativitätsprinzip dagegen ist, wie wir in § 26 sehen werden:

$$m_l = \frac{m}{\sqrt{1-q^2/c^2}^3},$$

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{1-q^2/c^2}};$$

m ist dabei die Ruhmasse des Elektrons. Nun erfährt ein bewegtes Elektron sowohl im elektrischen als im magnetischen Feld Kräfte, so daß man seine Dynamik experimentell untersuchen kann. Kaufmann[20]), der zuerst an diese Versuche herantrat, konnte auch die Abhängigkeit der transversalen Träg-

heit von der Geschwindigkeit bei den β-Strahlen nachweisen. Zu einer Entscheidung zwischen beiden Theorien reichte aber die Genauigkeit nicht aus. Und wenn auch spätere, sehr bedeutende Experimente von Bucherer[21]) und Hupka[22]) zugunsten der Relativitätstheorie zu sprechen scheinen, so sind doch die Meinungen über ihre Beweiskraft noch so geteilt, daß die Relativitätstheorie von dieser Seite eine unbedingt zuverlässige Stütze wohl noch nicht erhalten hat[23]).

Dies mannigfaltige Material soll nur zur Beurteilung der Relativitätsfrage herangezogen werden. Das Induktionsgesetz spricht für die Möglichkeit eines Relativitätsprinzips, denn nur von der relativen Verschiebung hängt die Veränderung des Integrals $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ (innerhalb der durch die Versuchsgenauigkeit gezogenen Grenzen) ab. Das gleiche gilt für die Aberration und den Dopplereffekt, sowie für alle elektromagnetischen und optischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche mit Ausnahme des Fizeauschen Versuches, welcher geradezu handgreiflich die Existenz eines ruhenden Äthers zu demonstrieren scheint. Auch können wir aus der Dynamik des Elektrons wegen der Veränderlichkeit der Trägheit jedenfalls den Schluß ziehen, daß die klassische Mechanik und ihr Relativitätsprinzip nicht allgemein gültig ist. Man erkennt schon hier, daß es eine wissenschaftliche Tat ersten Ranges sein muß, diese so widerspruchsvoll erscheinenden Ergebnisse aus einem Gesichtspunkte heraus zu erklären; man darf sich aber auch nicht wundern, daß diese Tat tief in unser ganzes physikalisches Weltbild eingreift und bis an die erkenntnistheoretischen Grundlagen dieser Wissenschaft rührt.

II. Die älteren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 3. Historische Übersicht.

Da die Relativitätstheorie eine so tiefgehende Wandlung in den Grundanschauungen der Physik erforderlich macht, bedarf sie vielleicht mehr wie andere Theorien des Beweises ihrer Notwendigkeit. Nun kann natürlich jede physikalische Theorie ihre

eigentliche Stütze nur in sich selbst und in der Bezugnahme auf die Tatsachen finden. Immerhin gibt es auch auf diesem Gebiet eine Art historischer Notwendigkeit, die in dem Fehlschlagen aller anderen Versuche liegt, zu einem befriedigenden Verständnis der Tatsachen zu gelangen. Aus diesem Grunde wollen wir von den älteren Theorien der bewegten Körper wenigstens zwei vorher besprechen, die Hertzsche Theorie und die Elektronentheorie von H. A. Lorentz. Wir wählen gerade diese aus, weil sie vom Standpunkt der Relativitätsfrage besonders interessant sind. Versucht doch die eine von ihnen das Relativitätsprinzip der Mechanik auf die Elektrodynamik zu übertragen, während die andere die Möglichkeit eines solchen Prinzips von Grund aus leugnet. Unserem Zweck entsprechend müssen wir natürlich mehr ihre Mängel als ihre Vorzüge hervortreten lassen; darum soll zunächst auf ihre hohe Bedeutung in der Geschichte der Wissenschaft hingewiesen werden. Die Gedanken, auf denen sie beruhen, lagen weit näher als die Grundidee der Relativitätstheorie; man wäre nie zu der letzteren gelangt, wenn nicht zuvor die Durchführung der ersteren versucht und der Versuch als aussichtslos erkannt worden wäre. Zudem hat namentlich die Lorentzsche Theorie durch Einführung gewisser neuer fundamentaler Begriffe der Relativitätstheorie so vorgearbeitet, daß deren schnelle Entwickelung zum großen Teil dieser ihrer Vorläuferin zu verdanken ist.

Nicht unerwähnt darf bleiben, daß H. A. Lorentz 1904 seine Theorie in Rücksicht auf den Michelsonschen Versuch so modifiziert hat, daß sie von allen Beobachtungen Rechenschaft gibt [in ihr tritt schon die „Lorentz-Transformation“ auf[1])], und daß E. Cohn eine Elektrodynamik aufgestellt hat, welche, abgesehen von dem Fehlen einer Atomistik, dasselbe leistet[2]). Doch wiegt dieser Mangel angesichts der Erscheinungen der Stromleitungen in Elektrolyten und Gasen, der Kathoden- und Radiumstrahlen so schwer, daß die Cohnsche Theorie nie weitere Verbreitung gefunden hat. Eine eigentliche experimentelle Entscheidung zwischen der erweiterten Lorentzschen und der Relativitätstheorie ist dagegen wohl überhaupt nicht zu erbringen, und wenn die erstere trotzdem in den Hintergrund getreten ist, so liegt dies hauptsächlich daran, daß ihr, so nahe sie auch der Relativitätstheorie kommt, doch das große, einfache, allgemeine

Prinzip mangelt, dessen Besitz der Relativitätstheorie schon in ihrer jetzigen, noch sehr der weiteren Entwickelung bedürftigen Gestalt etwas Imposantes verleiht.

§ 4. Die Theorie von Heinrich Hertz.

a) Ruhende Körper. Ende der 80er Jahre des 19. Jahrhunderts gelangte eine große Epoche der Elektrodynamik zum Abschluß, indem Hertz die Maxwellsche Theorie experimentell bewies und sie auf das folgende einfache System von Grundgleichungen brachte*):

$$\text{(I)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} \qquad \text{(II)}\quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J})$$

$$\text{(III)}\quad div\,\mathfrak{D} = \varrho \qquad \text{(IV)}\quad div\,\mathfrak{B} = 0$$

$$\text{(V)}\quad \mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E} \qquad \text{(VI)}\quad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

$$\text{(VII)}\quad \mathfrak{J} = \sigma\,\mathfrak{E}.$$

Dazu tritt noch ein Ansatz für die Dichte der elektromagnetischen Energie:

$$W = \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 + \mu\,\mathfrak{H}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

Als Grenzbedingung für Unstetigkeitsflächen kommt die Forderung hinzu, daß die Tangentialkomponenten beider Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und die Normalkomponenten beider Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ stetig sein sollen; sie ist durch Grenzübergang aus den Gleichungen (I) bis (IV) abzuleiten. Nur wo elektrische Flächenladung auftritt, hat die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ einen Sprung, dessen Betrag gleich der Dichte dieser Ladung ist.

In diesen wenigen Zeilen ist der Inbegriff aller elektromagnetischen und — wenn man von der Dispersion usw. absieht — auch optischen Erfahrung für ruhende Körper enthalten. Wir wollen zunächst einige allgemeine Schlüsse aus ihnen ziehen.

Bildet man an beiden Seiten der Gleichung (II) die Divergenz, so findet man in Rücksicht auf (III) und ι:

$$\dot{\varrho} + div\,\mathfrak{J} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

*) Wir beschränken uns auf isotrope, nicht permanent magnetisierte und nicht ferromagnetische Körper. Wegen der Bezeichnungen und des Maßsystems vgl. den Anhang.

eine Gleichung, die wir nach ihrer hydrodynamischen Analogie als die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität bezeichnen. Integriert man sie über einen Raum, dessen Grenzfläche ganz im Dielektrikum verläuft, so findet man mit Hilfe des Gaußschen Satzes $\varkappa$:

$$\int \dot{\varrho}\, d\tau = -\int div\, \mathfrak{I}\, d\tau = \int \mathfrak{I}_n\, d\sigma = 0,$$

d. h. die in einem solchen Raum enthaltene Elektrizitätsmenge ist zeitlich unveränderlich; das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität spricht sich in ihr aus.

An zweiter Stelle wollen wir eine nur die elektrische Feldstärke enthaltende, auf homogene nicht geladene Dielektrika ($\varrho = 0$, $\mathfrak{I} = 0$) bezügliche Beziehung ableiten. Vollziehen wir an (I) die Operation *rot*, so findet man in Berücksichtigung von Rechnungsregel i' und Gleichung (III) und (VI):

$$rot\ rot\ \mathfrak{E} = -\Delta\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\, rot\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\mu}{c}\, rot\ \dot{\mathfrak{H}}.$$

Differentiieren wir ferner (II) nach der Zeit, so folgt gemäß (V):

$$rot\ \dot{\mathfrak{H}} = \frac{\varepsilon}{c}\, \ddot{\mathfrak{E}},$$

also gilt für die elektrische Feldstärke die Differentialgleichung:

$$\Delta\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\, \ddot{\mathfrak{E}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Ganz analog leitet man für die magnetische Feldstärke

$$\Delta\mathfrak{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\, \ddot{\mathfrak{H}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13\,a)$$

ab. Diese für beide Feldstärken geltende Differentialgleichung bezeichnet man bekanntlich als Wellengleichung.

Schließlich wollen wir noch das Energieprinzip für die Maxwellsche Theorie formulieren: Multiplizieren wir (I) skalar mit $\mathfrak{H}$, (II) mit $-\mathfrak{E}$, so folgt durch Addition unter Berücksichtigung von (V) und (VI):

$$c[(\mathfrak{H}, rot\,\mathfrak{E}) - (\mathfrak{E}, rot\,\mathfrak{H})] = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2) - (\mathfrak{I}\mathfrak{E});$$

nach Rechnungsregel ϑ und (VIII) kann man diese Gleichung in die Form

$$\dot{W} + (\mathfrak{J}\mathfrak{E}) + c\,div\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

bringen. $(\mathfrak{J}\mathfrak{E})$ ist hier die pro Zeit- und Volumeinheit erzeugte Joulesche Wärme Q; $\dot{W} + (\mathfrak{J}\mathfrak{E})$ infolgedessen die Zunahme der gesamten Energiedichte pro Zeiteinheit. Vergleicht man (14) unter diesem Gesichtspunkte mit der Kontinuitätsgleichung (12), so leuchtet ein, daß man den „Pointingschen Vektor"

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,a)$$

als die Dichte der Energieströmung deuten kann, in dem Sinne, daß $\mathfrak{S}_n d\sigma$ die Energie ist, welche durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Zeit 1 hindurchströmt.

Eine periodische ebene Welle ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \Theta, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin \Theta \\ \Theta = 2\pi\nu\left[t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\left[x\cos(\mathfrak{S}x) + y\cos(\mathfrak{S}y) + z\cos(\mathfrak{S}z)\right]\right] \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

gegeben, wobei

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\,\mathfrak{E}_0^2 = \mu\mathfrak{H}_0^2 \\ (\mathfrak{E}_0\,\mathfrak{H}_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,a)$$

ist; durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (I) bis (IV) sowie in (13) und (13a) überzeugt man sich, daß diese identisch erfüllt sind. Die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ liegen dabei zueinander wie die x-, die y- und die z-Achse; die Welle schreitet mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ fort.

b) Bewegte Körper. Hertz ging aber sogleich einen Schritt über Maxwell hinaus, indem er nach den Grundgleichungen für bewegte Körper fragte. Wie schon erwähnt, ist seine Theorie im gewissen Sinne eine Übertragung des mechanischen Relativitätsprinzips[1]). Daraus folgt für die gesuchten Gleichungen: Erstens dürfen sie ihre Form bei einer Galilei-Transformation des Koordinatensystems nicht ändern, zweitens aber müssen sie in die Gleichungen für ruhende Körper übergehen, wenn wir von allen nach diesem Relativitätsprinzip gleichberechtigten Systemen dasjenige der Betrachtung zugrunde legen, in welchem der Körper gerade ruht. Beiden Forderungen genügt es, wenn wir an Stelle von (I) und (II) die folgenden Gleichungen treten lassen:

$$rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\underline{\dot{\mathfrak{B}}} = -\frac{1}{c}\left\{\dot{\mathfrak{B}} + rot\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{q}]\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (I')$$

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\underline{\dot{\mathfrak{D}}} + \mathfrak{J}) = \frac{1}{c}\left\{\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} + rot\,[\mathfrak{D}\,\mathfrak{q}] + \mathfrak{J}\right\} \quad (II')$$

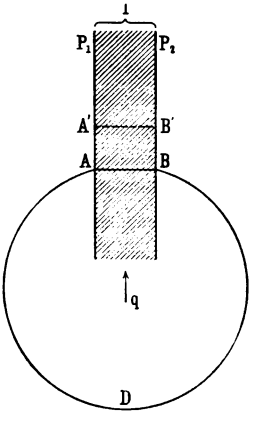
oder nach der Definition der Differentiation $\underline{\dot{\mathfrak{D}}}$ bzw. $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ (vgl. σ und σ'):

$$\int_{\circ} \mathfrak{E}_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{B}_n\,d\sigma\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (I'')$$

$$\int_{\circ} \mathfrak{H}_s\,ds = \frac{1}{c}\left\{\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{D}_n\,d\sigma\right) + \int \mathfrak{J}_n\,d\sigma\right\} \quad \cdots \quad (II'')$$

Die Gleichungen (III) bis (VIII) bleiben unverändert. Bei der Ausführung einer Galilei-Transformation ändern sich die rechten Seiten von (I'') und (II'') überhaupt nicht, da die Integration über mit der Materie bewegte Flächen zu erstrecken ist und in allen Bezugssystemen zu denselben Werten führt; und das gleiche gilt von den linksstehenden Linienintegralen. Zugleich aber gehen die Beziehungen (I') und (II') offenbar, wenn man ein System, in welchem der Körper ruht ($\mathfrak{q} = 0$), zugrunde legt („auf Ruhe transformiert"), in die Maxwellschen Gleichungen über. In einer Hinsicht freilich geht Hertz über das Relativitätsprinzip hinaus. Wir nahmen soeben stillschweigend an, daß sich die Körper als starre Körper und mit einer gleichförmigen, geradlinigen Geschwindigkeit bewegen, Hertz aber legt der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ keinerlei Beschränkung auf.

Fig. 2.



c) Der Wilsonsche Versuch. Prüfen wir diese Theorie zunächst an einigen der in § 2 aufgezählten Versuche. Nach (VII) ist hier die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^*$ mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ identisch; infolgedessen enthält (I') bzw. (I'') das Induktionsgesetz. Die Übereinstimmung mit dem Experiment hört aber auf, wenn wir den Wilsonschen Versuch erklären wollen. In Fig. 2 soll die schraffierte Fläche ein Querschnitt des Dielektrikums sein,

welches sich zwischen den leitenden und durch den Draht D leitend verbundenen Platten P_1 und P_2 mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegt. Der Abstand der Platten ist l, die magnetische Feldstärke soll auf der Zeichenebene senkrecht stehen, und zwar von unten nach oben weisen. Als mitbewegte Fläche, auf die wir die Gleichung (I″) anwenden, wählen wir das vom Draht D und der materiellen Linie AB berandete Stück der Zeichenebene. Nach Ablauf der Zeit dt hat sich diese Linie um die Strecke $q\,dt$ nach $A'B'$ verschoben; die Berandung ist jetzt durch den Draht D und den Linienzug $AA'B'B$ gebildet. Die Fläche hat sich also um $q\,l\,dt$, der Induktionsfluß durch sie um $|\mathfrak{B}|\,q\,l\,dt$ vergrößert; also ist

$$\int_{\circlearrowright} \mathfrak{E}_s\,ds = |\mathfrak{B}|\,q\,l.$$

Im stationären Zustande kann in dem Drahte D kein Strom fließen, weil sich sonst der Kondensator immer weiter aufladen müßte. Infolgedessen ist in D und ebenso auf den Linien AA' und BB' $\mathfrak{E} = 0$. Daher muß

$$\int_{A'}^{B'} \mathfrak{E}_s\,ds = |\mathfrak{E}|\,.\,l = |\mathfrak{B}|\,q\,l,$$

und nach (V) zwischen den Platten eine elektrische Verschiebung vom Betrage

$$|\mathfrak{D}| = \varepsilon\,|\mathfrak{B}|\,q$$

vorhanden sein, während im Innern der Platten $\mathfrak{D} = 0$ ist. An den Platten tritt daher eine Unstetigkeit der elektrischen Verschiebung und damit eine Flächenladung von der Dichte $\pm\varepsilon\,|\mathfrak{B}|\,q$ auf. Beobachtet aber wurde (§ 2) nur die Dichte $\pm(\varepsilon - 1)\,|\mathfrak{B}|\,q$. (Da $\mu = 1$, sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ identisch.)

d) Der Eichenwaldsche Versuch. Eine Abweichung ganz ähnlicher Art besteht zwischen dem Ergebnis des Eichenwaldschen Versuches und der Hertzschen Theorie. Auf der rechten Seite der Gleichung (II′) treten neben dem Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$ und dem Leitungsstrom $\mathfrak{I}$ noch die von $\mathfrak{q}$ abhängigen Glieder [vgl. (III)]:

$$\mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} = \varrho\,\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad rot\,[\mathfrak{D}\,\mathfrak{q}],$$

von welchen das erste in Übereinstimmung mit dem Rowlandschen Versuch den Konvektionsstrom angibt, während das zweite,

welches man als die Dichte des Röntgenstromes bezeichnet, die Erklärung des Eichenwaldschen Experimentes enthält. Bei diesem haben wir zwischen den Platten des Kondensators ein zeitlich und, wenn wir von den Komplikationen am Rande der Platte absehen, auch räumlich unveränderliches elektrisches Feld; die Verschiebung $\mathfrak{D}$ steht, wie auch $\mathfrak{E}$, senkrecht zu den Platten. Infolgedessen ist das Vektorprodukt $[\mathfrak{D}\mathfrak{q}]$ ebenfalls räumlich konstant und *rot* $[\mathfrak{D}\mathfrak{q}] = 0$. Nur an der Grenzfläche springt der Vektor $[\mathfrak{D}\mathfrak{q}]$ unstetig von dem Werte, den er im Innern hat, auf Null; da er an der Grenzfläche tangential ist, tritt ein Flächenrotor und damit ein flächenhafter Röntgenstrom von der Dichte $|[\mathfrak{D}\mathfrak{q}]| = |\mathfrak{D}|\,|\mathfrak{q}| = \varepsilon|\mathfrak{E}|\,|\mathfrak{q}|$ auf. Wir erwähnten oben, daß das Experiment dafür nur den Wert $(\varepsilon - 1)|\mathfrak{E}|\,|\mathfrak{q}|$ ergeben hat. Die Hertzsche Theorie widerspricht daher sowohl dem Wilsonschen als dem Eichenwaldschen Versuch. (Die hier gegebene Erklärung ist nur eine erste Annäherung; denn wegen des Auftretens eines magnetischen Feldes als Folge des Röntgenstromes ist $[\mathfrak{B}\mathfrak{q}]$, also nach (I') auch *rot* $\mathfrak{E}$, nicht mehr gleich Null und $\mathfrak{E}$ nicht mehr, wie angenommen wurde, räumlich konstant. Da aber $\mathfrak{B}$ selbst proportional zu q/c ist, so gibt dies nur einen Fehler zweiter Ordnung. Entsprechendes gilt für die Theorie des Wilsonschen Versuches.)

e) Der Fizeausche und Michelsonsche Versuch. Daß die Hertzsche Theorie dem Fizeauschen Versuch widerspricht, liegt nach dem Obigen auf der Hand und war auch ihrem Urheber bekannt. Besonders interessant ist aber ihre Stellung zum Michelsonschen Versuch. Das Mittel, in welchem er ausgeführt wird, ist natürlich Luft, die sich mit der Erde bewegt; und da in einem Körper, der sich wie ein starrer bewegt, die elektrodynamischen Vorgänge wie in einem ruhenden verlaufen sollen, so erklärt die Hertzsche Theorie in der Tat das Ausbleiben der Streifenverschiebung. Ganz anders wäre es, wenn man ihn im Vakuum angestellt hätte. Auch dort muß man nach Hertz offenbar etwas Substantielles, den Äther, annehmen, um überhaupt entscheiden zu können, ob eine Fläche sich mit ihm bewegt. Da die Erde relativ zum Äther nicht ruht, so müßte man in diesem nicht realisierten Falle beim Michelsonschen Versuch ein positives Ergebnis finden. Diese Erklärung ist aber trotz ihrer empirischen Unwiderlegbarkeit höchst unbefriedigend. Wir sind die Vorstellung

gewohnt, daß sich die Luft vom Vakuum elektromagnetisch nur sehr wenig unterscheidet, umsoweniger, je weiter wir sie verdünnen. Nach Hertz aber müßten bei immer weiter fortgesetzter Verdünnung selbst die letzten Gasreste für den Ausfall des Versuches entscheidend sein. (Derselbe Einwand trifft übrigens auch die Cohnsche Theorie.)

f) Der Induktionsvorgang. Den Einfluß des Bewegungszustandes des Äthers zeigt auch eine nähere Betrachtung der Induktion in einem Drahtkreise bei seiner Bewegung gegen einen Magneten. Beobachtungstatsache ist, daß nur die relative Lagenänderung in Frage kommt. Trotzdem Gleichung (I'), wie erwähnt, damit in Einklang steht, sind es nach Hertz wesentlich verschiedene Fälle, ob der Magnet allein oder die Drahtschleife allein zum Äther bewegt wird. Im ersten Falle haben wir im Äther ein zeitlich variables magnetisches Feld, welches nach (I) ein elektrisches Feld hervorruft. Im anderen Falle aber haben wir im Äther primär kein solches, sondern nur im Draht selbst [nach (I')], da dort das Produkt [q𝔙] von Null verschieden ist. Es gibt eben in dieser Theorie für den von Materie freien Raum wie für jeden ponderablen Körper ein ausgezeichnetes System, in welchem „der Äther" ruht, und dies findet seine Begründung in der Tatsache, daß nicht die Gleichungen (I) und (II) (auch nicht für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), sondern nur (I') und (II') gegen eine Galilei-Transformation invariant sind; ohne einen solchen Äther ließe sich die Theorie für Räume außerhalb der Materie überhaupt nicht anwenden.

g) Die Erhaltung des Impulses. Aber noch aus anderen Gründen braucht Hertz einen substantiellen Träger für das elektromagnetische Feld im Vakuum. Es zwingt dazu die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Impulssatz der Mechanik, welcher seinerseits nach § 1 eine notwendige Folgerung aus dem Energie- und dem Relativitätsprinzip der Mechanik ist. Geht nämlich von einem Körper A eine elektromagnetische Wirkung, etwa ein Lichtstrahl, aus, so erfährt A im allgemeinen eine Kraft, beim Licht den experimentell nachweisbaren Lichtdruck. Es ändert sich daher sein Impuls. Bis ein anderer Körper B von dieser Wirkung erreicht wird, können beliebig lange Zeiten vergehen. Bis dahin tritt an ponderablen Körpern sicherlich kein Äquivalent für die Impulsänderung von A ein. Soll dennoch der

Impulssatz gelten, so muß offenbar außerhalb der ponderablen Materie ein Zwischenmedium vorhanden sein, welches vom Feld Kräfte erfährt und infolgedessen sofort die nötige Kompensation für die Impulsänderung von A liefert. Dies geht auch tatsächlich aus dem Hertzschen Ansatz für die ponderomotorische Kraft hervor. Er führt nämlich die pro Volumeinheit wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ („Kraftdichte") auf den Maxwellschen Spannungstensor $\boldsymbol{p}$ vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IX)$$

zurück, dessen Komponenten die Werte

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})] - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x \\ p_{xy} &= p_{yx} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y) \end{aligned}\right\} \quad (X)$$

haben *). Die Durchrechnung ergibt eine resultierende Kraft $\mathfrak{F} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ auf das Vakuum **). Damit aber erhält die Frage nach den mechanischen Eigenschaften des Äthers einen Sinn, da sie mit der erwähnten Kraft zusammen die Bewegungen des Äthers bestimmen, welche für die Anwendung der Gleichungen (I′) und (II′) von Wichtigkeit sind [2]). So wird die Theorie ins Unendliche kompliziert, ohne daß dem irgend etwas Beobachtbares entspräche.

Man sieht schon aus dieser kurzen Darstellung, daß der Versuch, das Relativitätsprinzip der Mechanik auf die Elektrodynamik zu übertragen, aus empirischen Gründen und solchen, die in der Theorie selbst liegen, als mißglückt anzusehen ist.

§ 5. Die Elektronentheorie.

Die Elektronentheorie ist das Ergebnis der folgenden drei Gedanken:

1. Die Elektrizität ist atomistisch konstituiert. 2. Elektromagnetische Felder werden nur von Elektronen erregt und wirken

*) Da sich das dielektrische Verhalten der Körper bei einer Deformation ändert, so treten genau genommen noch gewisse kleine, aber in ihren Wirkungen gelegentlich doch beobachtbare Zusatzglieder hinzu [vgl. Encyklop. d. math. Wiss. V. 13, Nr. 22 u. 23 (H. A. Lorentz) und V, 15, Nr. 3 u. 4 (F. Pockels)]. Wir sehen im Interesse der Einfachheit von ihnen ab.

**) Vgl. § 15, Anm. S. 85.

nur auf Elektronen; sie haben ausschließlich im Äther ihren Sitz. Die ponderablen Körper kommen nur in zweiter Linie in Betracht, insofern sie Elektronen enthalten *). 3. Der Äther ist ein alles durchdringender, starrer Körper und definiert so ein bestimmtes System, auf welches die Feldgleichungen zu beziehen sind.

Die Feldgleichungen selbst gehen aus den Maxwellschen hervor, wenn man die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ gleich 1 setzt und an die Stelle des Leitungsstromes $\mathfrak{J}$ den Konvektionsstrom $\varrho\mathfrak{q}$ der Elektronen treten läßt. Die Elektronen werden in manchen Teilen der Theorie als starre Kugeln gedacht, doch ist in vielen anderen Teilen keine Annahme über ihre Gestalt nötig. Ihre Ladungsdichte ϱ denken wir zunächst als stetige Funktion des Ortes; zu Unstetigkeiten kann man dann noch immer durch Grenzübergänge gelangen. Der Satz 1. ist für die Relativitätsfrage unwesentlich [1]).

Nimmt man die erwähnten Veränderungen an den Gleichungen (I) bis (VIII) vor, so findet man:

$$\text{(Ia)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} \qquad \text{(IIa)}\quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}} + \varrho\mathfrak{q})$$

$$\text{(IIIa)}\quad div\,\mathfrak{E} = \varrho \qquad \text{(IVa)}\quad div\,\mathfrak{H} = 0$$

$$W = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIIIa)}$$

Dazu tritt noch der Ansatz für die auf die Volumeinheit bezogene ponderomotorische Kraft (die Kraftdichte):

$$\mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IXa)}$$

Er ist von den obigen Gleichungen nur zum Teil unabhängig, weil er mit ihnen zusammen dem Energieprinzip genügen muß (vgl. § 15). Man sieht an dem Faktor ϱ, daß der freie Äther keine Kraft erfährt.

---

*) Vielfach ist es üblich, den Ausdruck „Elektron" auf die von den Atomen der Materie freien Elementarquanta einzuschränken, welche uns negativ geladen in den Kathodenstrahlen entgegentreten, und deren positives Gegenstück sich bisher nicht hat nachweisen lassen. Wir setzen uns über diese für die mathematische Theorie unwesentliche Unterscheidung hinweg.

Wir wollen aus diesen Gleichungen hier nur zwei Folgerungen ziehen; alles andere verschieben wir auf § 14 u. f. Zunächst ist nach (13) und (13a) klar, daß für die Ausbreitung eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum die Wellengleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

gilt, wo unter φ jede der drei Komponenten von $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ verstanden werden kann. Zweitens gilt in Analogie zu (12) die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\varrho} + div(\varrho\,\mathfrak{q}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

In dieser Form gibt sie an, wie in einem im Raum festen Punkt die Änderung der Dichte mit dem Konvektionsstrom zusammenhängt. Wollen wir dagegen ein bestimmtes Elektron auf seiner Bahn verfolgen, so müssen wir die zeitlichen Veränderungen in einem materiellen Punkt (welcher die Bewegung des Elektrons mitmacht) [vgl. Gleichung (ϱ) des Anhangs] berechnen. Nun ist nach (ϱ') und (17)

$$\underline{\dot{\varrho}} = \dot{\varrho} + div(\varrho\,\mathfrak{q}) = 0.$$

Infolgedessen nach ϱ:

$$\frac{\delta(\varrho\,dv)}{\delta t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Jedes Volumelement dv des Elektrons und ebenso das ganze Elektron behält seine Ladung unverändert bei.

Diese Gleichungen vermögen alle Beobachtungen, bei welchen nur einzelne Elektronen gebunden eventuell an einige wenige Atome vorkommen, befriedigend zu erklären *). Z. B. wird die Ablenkbarkeit aller Korpuskularstrahlen im magnetischen Felde durch das Auftreten des Gliedes $\frac{\varrho}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]$ in (IXa) gedeutet. Um aber die Elektrodynamik der ponderablen Körper zu begründen, braucht man noch Annahmen über die Kräfte, welche die Elektronen von seiten der Atome erfahren. Man unterscheidet zwei Arten, Leitungs- und Polarisationselektronen. Die ersteren bewegen sich frei zwischen den Atomen mit derselben mittleren

*) Über die Dynamik des Elektrons vgl. § 2.

kinetischen Energie wie die Atome selbst. Nur wenn ein elektromagnetischer Antrieb auf sie wirkt, wächst die Energie über dies Maß, doch wird der Überschuß nie erheblich, weil die Zusammenstöße mit den Atomen im Sinne des Ausgleichs wirken und daher nach Art eines Widerstandes gegen geordnete Bewegungen der Elektronen in Rechnung gezogen werden können. Aus diesen Vorstellungen folgerte Drude, daß sie nicht nur die Träger des elektrischen Stromes sind, sondern auch den Temperaturausgleich zum überwiegenden Teil vermitteln; er konnte so z. B. die an vielen Metallen beobachtete Proportionalität zwischen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit theoretisch ableiten.

Die Polarisationselektronen hingegen haben Gleichgewichtslagen in den Atomen und werden nach diesen durch „quasielastische", d. h. der Elongation proportionale Kräfte zurückgezogen; unter ihrem Einfluß können sie periodische Schwingungen ausführen, deren Strahlung (jedes beschleunigte Elektron strahlt Energie aus) wir in den Spektrallinien vor uns haben. Außer der durch die Ausstrahlung bedingten Dämpfung muß allerdings noch eine andere, vielleicht kinetisch zu deutende Reibung angenommen werden.

Mit diesen Vorstellungen kann man die elektrisch-optischen Eigenschaften der Dielektrika qualitativ befriedigend erklären. Die Existenz einer von 1 verschiedenen Dielektrizitätskonstanten ist die Folge des elektrischen Moments, welches die Atome unter dem Einfluß der Feldstärke durch die Verschiebung der Polarisationselektronen annehmen, die Dispersion und selektive Absorption werden auf die Resonanz der Elektronenschwingungen zugeführt; namentlich die Anomalien, welche in den der Eigenschwingung benachbarten Spektralbereichen auftreten, kommen ungezwungen heraus. Eine epochemachende Bestätigung fanden diese Anschauungen ferner in der Entdeckung, daß sich die Spektrallinien im Magnetfeld aufspalten. Den einfachsten Fall dieses nach seinem Entdecker benannten Zeeman-Phänomens konnte Lorentz ohne weiteres theoretisch deuten. Aber auch bei den später entdeckten, komplizierteren Zerlegungen ist der Zusammenhang mit den Elektronen, wie wir sie in den Kathodenstrahlen vor uns haben, zweifellos festgestellt.

Doch es würde zu weit führen, wollten wir die Gründe auch nur einigermaßen vollzählig hier aufführen, aus denen hervorgeht,

daß die Elektronentheorie an Wahrheitswert der Maxwellschen weit überlegen ist. Dagegen darf nicht verschwiegen werden, daß sich ihrem weiteren Ausbau gerade von seiten der Elektrodynamik ponderabler Körper erhebliche Schwierigkeiten in den Weg stellen. Zunächst ist die Theorie der metallischen Leitung keineswegs mit allen einschlägigen Beobachtungen in Einklang gebracht, und bei den Dielektriken läßt die quantitative Übereinstimmung mit der Erfahrung ebenfalls noch zu wünschen übrig. Gar nicht aufgeklärt ist, wie man sich das Nebeneinanderbestehen der vielen Spektrallinien denken soll, welche uns die Spektra der Gase zeigen, noch weniger, wie wir die einfachen Gesetze zwischen den Schwingungszahlen aller einer Serie angehörigen Linien, die Beziehungen zwischen verschiedenen Serien desselben und zwischen analogen Serien verschiedener chemischer Elemente zu deuten haben. Auch ist noch keine befriedigende Theorie des Magnetismus auf elektronentheoretischer Grundlage gegeben worden. Einleuchtend ist nur, daß die Magnetisierbarkeit auf kreisende Bewegungen der Elektronen in den Atomen nach Art der Ampèreschen Magnetismushypothese zurückgeführt werden muß; die Proportionalität aber zwischen der magnetischen Feldstärke und Induktion ist noch nicht erklärt. Schließlich führt die Elektronentheorie bei ihrer Anwendung auf die Thermodynamik der Wärmestrahlung zu Schlüssen, welche mit der Beobachtung im schärfsten Widerspruch stehen.

Trotz dieser enormen Schwierigkeiten besteht wohl begründete Hoffnung, die elektromagnetischen Grundgleichungen aufrecht erhalten zu können. Denn alle Unstimmigkeiten lassen sich auf die Annahmen über den Zusammenhang von Elektronen und Atomen — in der Strahlungstheorie auf die dort angewandte statistische Methode — schieben, welche durchaus provisorischen Charakter tragen. Das Problem, sie zu verbessern, führt freilich sogleich mitten in die Kardinalfrage der ganzen Physik und Chemie, die nach der Konstitution des Atominnern, und es besteht anscheinend wenig Aussicht, daß ein durchgreifender Fortschritt auf diesem Gebiete bald erreicht werden wird*).

---

*) Neuerdings ist von verschiedenen Seiten angeregt worden, man sollte die Wellentheorie des Lichtes durch eine atomistische (Lichtquanten-) Theorie ersetzen, was eine Aufgabe oder zum mindesten

Zum Glück sind diese Mängel der Elektrodynamik ruhender Körper für die Relativitätsfrage von geringerer Bedeutung. Wir werden uns zur Begründung einer Elektrodynamik der bewegten Körper damit begnügen, die Maxwellschen Gleichungen mit Dielektrizitätskonstante und Permeabilität anzuwenden, solange es sich um im engeren Sinne elektromagnetische Erscheinungen bei ponderablen Körpern handelt, und bei optischen Problemen als einzige Abänderung $\mu = 1$ und für ε die Wurzel aus dem Brechungsindex zu setzen, wie er für die betreffende Schwingungszahl gemessen ist. Für die Dynamik des Elektrons aber, die Wechselwirkungen verschiedener Elektronen aufeinander und ähnliche atomistische Probleme, sowie für die Elektrodynamik des leeren Raumes bilden die Gleichungen (Ia), (IIa) usw. die zuverlässige Grundlage.

Wir müssen nun noch die Stellung der Elektronentheorie zur Relativitätsfrage ins Auge fassen. Nach dem dritten der grundlegenden Sätze (S. 27/28) ist es klar, daß sie die Relativität der elektromagnetischen Vorgänge im Prinzip leugnet. Gerade durch die Unbeweglichkeit des Äthers erklärt sie. und zwar quantitativ richtig, den Fresnelschen Mitführungskoeffizienten, den Wilsonschen und Eichenwaldschen Versuch. Um so bemerkenswerter ist, daß die absolute Bewegung gegeneinander ruhender Körper erst in Gliedern zweiter Ordnung in ihre Formeln eingeht. Alle Versuche über die Erdbewegung, welche das Fehlen eines Einflusses erster Ordnung zeigen, konnte H. A. Lorentz (1895) in seinem berühmten „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“ deuten. Nur der Michelsonsche Versuch blieb unerklärt; denn daß die mitbewegte Luft nicht als Grund für das Ausbleiben der Streifenverschiebung herangezogen werden darf, folgt aus dem von 1 kaum verschiedenen Wert ihrer Dielektrizitätskonstanten; er beweist nämlich, daß ihre Molekeln elektromagnetische Vorgänge nicht erheblich beeinflussen.

Später kam als Gegenbeweis noch der Trouton-Noblesche Versuch hinzu. Diese beiden Experimente ließen die Relativitäts-

---

eine wesentliche Veränderung der Feldgleichungen (Ia) usw. erforderte. Doch scheinen die Gründe dafür nicht schwerwiegend genug, um die sehr großen entgegenstehenden Bedenken zu überwinden [1]).

frage nicht zur Ruhe kommen. Immerhin blieb das Vertrauen zu den Feldgleichungen so stark, daß man nicht an ihnen, sondern an der Kinematik und Mechanik zu reformieren begann, indem man auch für sie einen physikalischen Einfluß der absoluten Bewegung annahm, welcher den Einfluß auf die Elektrodynamik gerade kompensieren sollte. Nach diesem Standpunkt, auf welchem die in § 3 erwähnte Lorentzsche Arbeit vom Jahre 1904 steht, gibt es daher einen Äther, doch bleiben die physikalischen Einwirkungen der „absoluten" Bewegung gegen ihn stets unerkennbar. Genau umgekehrt verfährt die Relativitätstheorie. Auch sie behält die Elektrodynamik bei, ordnet aber beide Gebiete einem Relativitätsprinzip, und zwar demselben unter. Man wird wohl kaum umhin können, das letztere Verfahren als das weit befriedigendere zu bezeichnen; denn es widerspricht allen erkenntnistheoretischen Prinzipien, einem Körper physikalische Wirklichkeit zuzusprechen, wenn er niemals nachgewiesen werden kann. Dies um so mehr, als die Lorentzsche Theorie an vielen Stellen der Mechanik Abänderungen vornehmen mußte; es blieb A. Einsteins grundlegender Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" im 17. Bande der Annalen der Physik (1905) vorbehalten, durch eine tiefgreifende Kritik des Zeitbegriffes bis zu dem entscheidenden Punkt vorzudringen und so des Rätsels Lösung auf einen Schlag zu bringen.

III. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil.

§ 6. Die Lorentz-Transformation.

Das Relativitätsprinzip behauptet: Man kann aus der Gesamtheit der Naturerscheinungen durch immer weiter gesteigerte Annäherung immer genauer ein Bezugssystem x, y, z, t bestimmen, in welchem die Naturgesetze in bestimmten, mathematisch einfachen Formen gelten. Dies Bezugssystem ist aber durch die Erscheinungen keineswegs eindeutig festgelegt. Vielmehr gibt es eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit gleichberechtigter Systeme, welche sich gegeneinander mit gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegen.

Aus diesem Prinzip wollen wir die Transformationsgleichungen ableiten, welche von einem berechtigten Bezugssystem zu einem anderen führen. Wir bedürfen dazu der Kenntnis irgend eines Naturgesetzes; welches wir auswählen, muß prinzipiell gleichgültig sein. Gelangte man nämlich bei verschiedener Wahl zu verschiedenen Resultaten, so wären nicht alle Gesetze derselben Transformation gegenüber unveränderlich, das Relativitätsprinzip also falsch. Am einfachsten sind offenbar solche Gesetze, die sich auf physikalische Vorgänge im leeren Raum beziehen. Denn bei den anderen geht die Geschwindigkeit der Materie zum Bezugssystem in ihre mathematische Formulierung ein und muß bei einer Transformation mit transformiert werden; im Vakuum aber, wo wir nichts Bewegtes kennen, fällt diese Komplikation fort. Wir kennen nun zwei verschiedene Wirkungen, welche sich durch das Vakuum fortpflanzen, die Gravitation und die elektromagnetischen Vorgänge. Von der Ausbreitung der ersteren wissen wir nichts weiter, als daß ihre Geschwindigkeit selbst gegen die astronomischen Geschwindigkeiten sehr groß ist. Daß sie größer als die des Lichtes wäre, wird zwar vielfach behauptet, findet aber in der Erfahrung keine Stützpunkte. Um so besser kennen wir das Gesetz der Lichtfortpflanzung im Vakuum, ist doch durch den Michelsonschen Versuch mit einer bei sonstigen physikalischen Messungen kaum erreichten Genauigkeit festgestellt, daß sie, bezogen auf alle Systeme, nach allen Richtungen gleichmäßig erfolgt. Wir fügen als eine über den experimentellen Befund hinausgehende, aber vom Relativitätsprinzip notwendig geforderte Annahme hinzu, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen denselben Wert $c = 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ hat. Dies Gesetz legen wir der folgenden Betrachtung zugrunde.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Von einem materiellen Punkt A, welcher in einem berechtigten Bezugssystem K im Anfangspunkt der Koordinaten ruht, geht zur Zeit $t = 0$ ein kurzes Lichtsignal nach allen Seiten aus. Zur Zeit $t > 0$ liegen die das Signal empfangenden Punkte auf einer Kugel, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

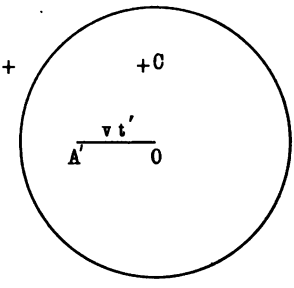
Auf dieser Kugel mögen zwei andere, in K ruhende, materielle Punkte B und C liegen; diese erhalten das Signal demnach gleichzeitig, d. h. für denselben Wert von t.

Denselben Vorgang beziehen wir nun auf ein anderes berechtigtes System, K', welches sich zum ersteren mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $\overrightarrow{BC}$ bewegt. Die materiellen Punkte A, B, C haben dann in K' die Geschwindigkeit v parallel $\overrightarrow{CB}$. Die Anfangspunkte der Koordinaten x', y', z' sowie der Zeit t' können wir offenbar so festlegen, daß das Lichtsignal zur Zeit $t' = 0$ im Anfangspunkt O der gestrichenen Koordination vom materiellen Punkt A ausgesandt wird. Nach Ablauf der Zeit t' werden alle Punkte der Kugel

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

vom Signal erreicht. Da aber A sich inzwischen aus O um die Strecke $v t'$ bis nach A' entfernt hat, so gibt es keinen Wert t', für den die von A gleich weit entfernten materiellen Punkte B und C auf einer derartigen Kugel liegen; sie werden also nicht gleichzeitig vom Signal erreicht, vielmehr trifft dies wie die Fig. 3 zeigt, in C früher ein, als in B. Zwei Ereignisse, welche im System K gleichzeitig sind, sind es also im System K' im allgemeinen nicht. Die identische Transformation für die Zeit, welche einen Teil der Galilei-Transformation bildete, kann hier nicht aufrecht erhalten bleiben.

Fig. 3.



Dies nötigt uns, den Begriff der Zeit einer kritischen Betrachtung zu unterziehen. Wir messen die Zeit an einem Ort mit Uhren, brauchen dabei aber nicht an die gebräuchlichen mechanischen Instrumente zu denken, bei welchen die Periode elastischer Schwingungen als Zeitmaß dient, sondern wir können die Zeit an dem Fortschreiten jedes physikalischen Vorganges ablesen, wenn wir nur seine Ursachen so genau beherrschen, daß keine unbekannte oder quantitativ unkontrollierbare Ursache mitwirken kann. Derartige vollkommen gleiche Uhren stellen wir uns an verschiedenen Stellen des Raumes, alle in einem und demselben berechtigten Systeme K ruhend, auf. Dann ist die Gleichheit des Zeitmaßes für alle diese Orte gewährleistet. Um aber

zu einer für das ganze System K einheitlich definierten Zeit zu gelangen, müssen wir noch die Nullpunkte dieser verschiedenen Zeitangaben in passende Beziehung zueinander setzen. Dazu verhilft uns die Forderung, daß im System K die Lichtgeschwindigkeit den Wert c haben soll. Haben zwei Uhren die Entfernung l voneinander, so soll nämlich die Zeitangabe der ersten beim Ablassen eines Lichtsignales von ihrem Orte und die Zeitangabe der zweiten bei seinem Eintreffen an ihrem Orte um den Betrag l/c differieren. Diese Definition führt nicht zum Widerspruch mit sich selbst, wenn man die Uhren auf verschiedene Arten paarweise zusammenfaßt. Sind nämlich die Uhren in den beliebig gewählten Punkten B und C mit der in einem beliebigen dritten Punkt A synchron gestellt, und senden wir von A zur Zeit 0 ein Lichtsignal nach B, welches von dort ohne Zeitverlust nach C und dort ebenso nach A zurück weitergegeben wird, so ist die Zeit seiner Rückkehr $t_A = 1/c\ (AB + BC + CA)$, da es die Strecke $AB + BC + CA$ durchlaufen hat. Es hat nach der Voraussetzung des Synchronismus der Uhren in A und B die Zeit B erreicht, als die Uhr in B die Zeit $t_B = AB/c$ wies, und wegen des Synchronismus der Uhren in A und C den Punkt C verlassen, als die Uhr in C die Zeit $t_C = t_A - AC/c$ anzeigte. Beim Abgang des Signals in B und bei seiner Ankunft in C besteht also zwischen den Zeitangaben der Uhren in C und B die Differenz $t_C - t_B = BC/c$, d. h. die Uhren in B und C gehen auch miteinander synchron. — Gleichzeitig sind Ereignisse, wenn sie sich bei gleicher Stellung der an ihren Orten befindlichen Uhren abspielen.

Daß man so für jedes berechtigte System zu einer besonderen Zeit kommt, durch die es sich von den anderen berechtigten Systemen unterscheidet, zeigt schon das obige Beispiel. Darin liegt gerade die Kühnheit und die hohe philosophische Bedeutung des Einsteinschen Gedankens, daß er mit dem hergebrachten Vorurteil einer für alle Systeme gültigen Zeit aufräumt. So gewaltig die Umwälzung auch ist, zu welcher er unser ganzes Denken zwingt, so liegt doch nicht die mindeste erkenntnistheoretische Schwierigkeit in ihm. Denn die Zeit ist wie der Raum in Kants Ausdrucksweise eine reine Form unserer Anschauung; ein Schema, in welches wir die Ereignisse einordnen müssen, damit sie im Gegensatz zu subjektiven, in hohem Maße

zufälligen Wahrnehmungen objektive Bedeutung gewinnen. Diese Einordnung kann nur auf Grund der empirischen Kenntnis der Naturgesetze vollzogen werden. Ort und Zeit der beobachteten Veränderung an einem Himmelskörper z. B. kann nur auf Grund der optischen Gesetze festgestellt werden. Daß zwei verschieden bewegte Beobachter, wenn jeder sich selbst als ruhend betrachtet, diese Einordnung auf Grund derselben Naturgesetze verschieden vornehmen, enthält keine logische Unmöglichkeit. Objektive Bedeutung haben beide Einordnungen dennoch, da sich aus jeder von ihnen vermittels der abzuleitenden Transformationsformeln die für anders bewegte Beobachter gültige eindeutig ableiten läßt.

Um zu den Transformationsformeln zu gelangen, fragen wir nach denjenigen linearen Beziehungen zwischen x', y', z', t' und x, y, z, t, welche die Wellengleichung (16)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0$$

in sich selbst überführen; d. h. für welche die Identität gilt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (19)$$

Denn Gleichung (16) ist die mathematische Formulierung des Gesetzes der Lichtfortpflanzung. Linear wählen wir diese Substitutionen, weil anderenfalls der Anfangspunkt der Koordinaten und der Nullpunkt der Zeit wenigstens in einem von beiden Systemen ausgezeichnete Punkte würden, welche man nicht ohne wesentliche Änderungen verlegen kann. Wir betrachten aber die Gleichwertigkeit aller Raumpunkte und Zeitmomente als ein empirisch festgestelltes, nach dem Relativitätsprinzip für beide Systeme geltendes Naturgesetz. Ferner setzen wir fest, daß entsprechende Koordinatenachsen in beiden Systemen einander parallel, und zwar die x- und x'-Achse der Geschwindigkeit v parallel sein sollen, mit welcher das gestrichene System K' sich gegen das ungestrichene K bewegt; und daß schließlich den Werten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ die Werte $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $t' = 0$ entsprechen sollen. Die allgemeinsten Gleichungen, welche diesen Bedingungen genügen, lauten:

$$\left.\begin{aligned} x' = \varkappa(v)\,(x - vt) \quad y' = \lambda(v)\,y \quad z' = \lambda(v)\,z \\ t' = \mu(v)\,t - \nu(v)\,x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

wo $\varkappa(v)$, $\lambda(v)$, $\mu(v)$ und $\nu(v)$ noch zu bestimmende Funktion von v sind. Zunächst ist nämlich einleuchtend, daß es nur eine ausgezeichnete Richtung, die der x-Achse gibt. Schon aus diesem Grunde können y und z in der Gleichung für t' nicht auftreten, da sonst die Richtung bevorzugt wäre, deren Richtungskosinus sich wie die Koeffizienten von x, y, z verhalten. Ferner muß die Ebene $x' = 0$ mit der Ebene $x = vt$, die Ebene $y' = 0$ mit $y = 0$ und $z' = 0$ mit $z = 0$ identisch sein. Die Proportionalitätsfaktoren zwischen y' und y sowie zwischen z' und z müssen schließlich wegen der Gleichwertigkeit aller zu x senkrechten Richtungen dieselben sein.

Durch die Substitutionen (20) wird eine Funktion

$$\varphi(x', y', z' t') = \varphi(\varkappa(x - vt), \lambda y, \lambda z, \mu t - \nu x)$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varkappa v \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - 2\varkappa\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'} + \nu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2},$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \varkappa^2 \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - 2\frac{\varkappa \mu v}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'} + \frac{\mu^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}.$$

Soll also Gleichung (19) als Identität gelten, so müssen bei der Summation der letzten vier Gleichungen die Koeffizienten von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}, \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2},$$

alle gleich 1 werden, der von $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'}$ dagegen verschwinden, d. h. es muß

$$\lambda(v) = \pm 1, \quad \varkappa(v) = \mu(v) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \nu(v) = \mu(v)\frac{v}{c^2}$$

sein. Für $\varkappa$, λ und μ wählen wir wegen der Parallelität von x und x', y und y', sowie z und z', und damit für $v = 0$ t' in t und nicht in $-t$ übergeht, das positive Vorzeichen. Die Gleichungen (20) nehmen dann die Form an:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad . \quad (XI)$$

Wegen der Gleichwertigkeit beider Systeme muß gestattet sein, in diesen Gleichungen die gestrichenen und ungestrichenen Größen miteinander zu vertauschen, wenn man nur zugleich das Vorzeichen von v umkehrt, weil das System K gegen K' die Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x'-Achse hat. Man findet also:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad . (XIa)$$

Die Rechnung zeigt, daß (XIa) tatsächlich die Umkehrung von (XI) ist. Die Gesamtheit der Gleichungen (XI) oder (XIa) bezeichnen wir als eine Lorentz-Transformation; das Relativitätsprinzip behauptet, daß alle Bezugssysteme, welche durch eine solche aus einem berechtigten System hervorgehen, dem ersteren nicht nur für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wirkungen im Vakuum, sondern für alle physikalischen Vorgänge völlig gleichberechtigt sind.

Ebenso wie die Gesamtheit aller Galilei-Transformationen, bildet die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen eine Gruppe; wendet man zwei von ihnen mit beliebig gerichteten Relativgeschwindigkeiten v hintereinander an, so erhält man ein Ergebnis, das auch durch eine einzige zu erreichen ist. Denn bleibt sowohl bei dem linearen Übergang von einem System K zu K' als bei dem linearen Übergang von K' zu K'' der Ausdruck

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

unverändert, so ist dieses auch bei dem dann ebenfalls linearen unmittelbaren Übergang von K zu K'' der Fall. Wir bemerken ferner, daß

$$v < c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

sein muß; anderenfalls würden die Koeffizienten von (XI) imaginär oder unendlich. Man überzeugt sich leicht, daß man statt der

Invarianz der Wellengleichung auch die des Ausdrucks $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ als Kennzeichen einer Lorentz-Transformation benutzen kann; bestimmt man nämlich die Koeffizienten $\varkappa$, λ, μ, ν in (20) aus der letzteren Forderung, so findet man genau dieselben Werte wie oben.

§ 7. Die Einsteinsche Kinematik.

Zur Diskussion untersuchen wir zunächst den Gang einer im gestrichenen System ruhenden Uhr ($x' = const$) vom ungestrichenen System aus. Dem Zeitintervall $\Delta t'$, welches ein mitbewegter Beobachter an ihr abliest, entspricht nach (XI a) das Intervall

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

welches von einem Beobachter im System K durch Vergleich der Zeitangaben ermittelt wird, welche zwei in dem Anfangs- und Endpunkt der inzwischen zurückgelegten Strecke ruhende Uhren beim Abgang und Eintreffen der bewegten liefern. Man kann dies auch aus (XI) ableiten; denn in der Zeit Δt legt die Uhr im System K die Strecke $\Delta x = v \Delta t$ zurück, woraus

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (22)$$

folgt. Eine mit der Geschwindigkeit q bewegte Uhr geht also im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ langsamer als dieselbe Uhr, wenn sie ruht. Dieser Satz gilt selbstverständlich unabhängig davon, auf welches der berechtigten Systeme man die Begriffe Ruhe und Bewegung bezieht.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden sich bei der Messung der Länge eines bewegten Stabes. Ruht dieser in K' und liegt er parallel zur x'-Achse, so ist seine Ruhlänge s_0 bestimmt durch die Differenz der x'-Koordinaten seiner Endpunkte, also:

$$s_0 = x'_1 - x'_2;$$

diese kann man durch Anlegen eines ebenfalls in K' ruhenden Maßstabes feststellen. Seine Länge, bezogen auf K, ist hingegen

gleich der Differenz der x-Koordinaten, welche seinen Endpunkten für gleiche Werte von t zuzuschreiben sind; daher folgt aus (XI):

$$s = x_1 - x_2 = (x_1^1 - x_2^1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = s_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (23)$$

Die Abmessung eines Körpers parallel zur Bewegungsrichtung wird also vom mitbewegten System aus größer beurteilt als von jedem anderen. Bringen wir einen Stab unter Aufrechterhaltung seines inneren Zustandes*) (etwa im leeren Raum und ohne Wärmezufuhr) von der Ruhe auf die Geschwindigkeit q, so zieht er sich im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ zusammen; nennen wir nämlich das System, in welchem er anfangs ruhte, K, das andere, in welchem er nach seiner Beschleunigung ruht, K', so muß seine Länge im zweiten Zustande, bezogen auf K', s_2', gerade so den Wert s_0 haben, wie die Länge s_1, welche er im ersten Zustande in K besaß. — Dieser Satz ist eine Folge der verschiedenartigen Anwendung des Zeitschemas durch verschieden bewegte Beobachter; er rechtfertigt die von Fitzgerald[1]) und Lorentz[2]) schon vor der Relativitätstheorie zur Erklärung des Michelsonschen Versuches herangezogene Kontraktionshypothese und wird in der Tat notwendig gebraucht, wenn man die Theorie dieses Experiments für ein nicht mitbewegtes System geben will. Verkürzt sich nämlich in Fig. 1 (S. 14) die Strecke PS_1 bei der Bewegung parallel zu ihr auf die Länge $l\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$, so wird nach (10) und (11):

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - q^2}} = t_2.$$

Bei einer Drehung des Apparats, welche die Vertauschung der Rollen von PS_1 und PS_2 zur Folge hat, tritt dann keine Verschiebung der Interferenzstreifen ein.

Die Dimensionen senkrecht zur Bewegung werden nach (XI) nicht verändert. Das Volumen V eines Körpers ist deswegen bei

*) Im Abschnitt VII werden wir solche Beschleunigungen als adiabatisch-isopieistisch bezeichnen.

der Lorentz-Transformation wie die Abmessung parallel der Geschwindigkeit umzurechnen. Da somit in jedem System $\frac{V}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ gleich dem Volumen V_0 im mitbewegten System ist, so dient als Umrechnungsformel für das Volumen eines Körpers, der zu K die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, zu K' die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ hat, die Gleichung

$$\frac{V}{\sqrt{c^2-q^2}} = \frac{V'}{\sqrt{c^2-q'^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Eine weitere Folge der Kontraktion ist, daß die Form der Körper von verschiedenen Systemen aus verschieden beurteilt wird. Ein Körper z. B., der, vom mitbewegten System aus untersucht, Kugelgestalt hat, ist in allen anderen Systemen ein abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Als letzte kinematische Folgerung soll hier die Transformationsformel für die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes abgeleitet werden. Sind dessen Koordinaten x, y, z im System K Funktionen der Zeit t, so sind die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_y = \frac{dy}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_z = \frac{dz}{dt}.$$

Die entsprechende Definition gilt für seine Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ in bezug auf K'. Aus (XI) folgt aber:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

also:

$$\mathfrak{q}'_x = \frac{\mathfrak{q}_x - v}{1-\frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}'_y = \frac{\mathfrak{q}_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}'_z = \frac{\mathfrak{q}_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}} \qquad (25)$$

oder wenn man umgekehrt $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{q}'$ ausdrückt:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{q}'_x + v}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_y = \frac{\mathfrak{q}'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_z = \frac{\mathfrak{q}'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{e^2}}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} \tag{25a}$$

Multipliziert man die auf die y- oder z-Komponenten bezüglichen Gleichungen in (25) und (25a) miteinander, so findet man:

$$\left(1 - \frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}\right) = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \cdots \quad (25b)$$

Weiter zeigt eine einfache Rechnung, indem man die Gleichungen (25) quadriert und addiert und $v\,\mathfrak{q}_x$, $v\,\mathfrak{q}'_x$ durch die skalaren Produkte $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')$ ersetzt:

$$\frac{c^2 - q^2}{c^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q})} = \frac{c^2 - q'^2}{c^2 + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')} \cdot \cdots \cdots \quad (25c)$$

Aus (24), (25b) und (25c) folgt:

$$\sqrt{\frac{c^2 - q'^2}{c^2 - q^2}} = \frac{c\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q})} = \frac{c^2 + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = \sqrt{\frac{c^2 + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')}{c^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{q})}} = \frac{V'}{V} \tag{25d}$$

Bezeichnet man schließlich mit ϑ' den Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ und der x-Achse, so gilt nach (25a):

$$q^2 = \frac{q'^2 + v^2 + 2\,q'\,v\cos\vartheta' - \left(\frac{q'\,v}{c}\sin\vartheta'\right)^2}{\left(1 + \frac{q'\,v}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2} \quad \cdots \quad (25e)$$

da

$$tg\,\vartheta' = \frac{\sqrt{\mathfrak{q}'^2_y + \mathfrak{q}'^2_z}}{\mathfrak{q}'_x}$$

ist. Diese Gleichungen geben an, wie sich, vom System K aus betrachtet, die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{q}$ zusammensetzen; sie enthalten das berühmte Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit*).

*) Es sei darauf hingewiesen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ auf ein anderes System bezogen ist wie $\mathfrak{v}$. Sind beide auf dasselbe System zu beziehen, so muß natürlich die gewöhnliche Vektoraddition für sie gelten. Die Geschwindigkeit des Lichtes gegen einen bewegten Stab,

Das merkwürdigste ist dabei, daß die beiden zu addierenden Geschwindigkeiten nicht gleichberechtigt auftreten. Ist z. B. $\mathfrak{q}'$ parallel zu y, $\mathfrak{v}$ wie bisher parallel zu x, so wird nach (25a) unter der Annahme, daß man $\mathfrak{q}'$ zu $\mathfrak{v}$ addiert,

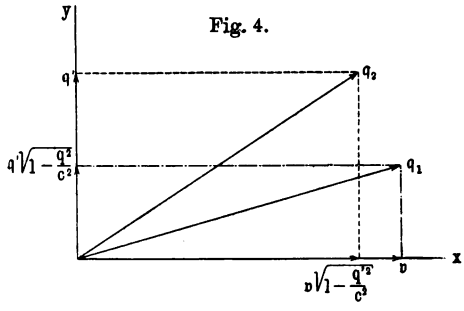
$$\mathfrak{q}_{1x} = v, \qquad \mathfrak{q}_{1y} = q'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};$$

wenn aber umgekehrt $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{q}'$ addiert wird,

$$\mathfrak{q}_{2x} = v\sqrt{1-\frac{q'^2}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}_{2y} = q'.$$

Der absolute Wert q ist in beiden Fällen derselbe [vgl. auch die in q' und v symmetrische Beziehung (25e)], aber die Richtungen sind verschieden (Fig. 4). Denken wir uns ein materielles rechtwinkliges Dreieck mit der Geschwindigkeit v parallel der ersten Kathete verschoben, und führen an der zweiten Kathete einen Zeichenstift mit der Geschwindigkeit q' entlang, so beschreibt dessen Spitze auf der Zeichenebene die Strecke $\mathfrak{q}_1$ in der Zeiteinheit. Verschieben wir aber das Dreieck parallel der zweiten Kathete mit der Geschwindigkeit q' und den Zeichenstift längs der ersten mit der Geschwindigkeit v, so beschreibt seine Spitze die Strecke $\mathfrak{q}_2$ [3]).

Fig. 4.



Nach (21) ist $v < c$. Lassen wir q' von 0 an wachsen: wie auch die Richtung von $\mathfrak{q}$ sein mag, der Nenner $c^2 + (\mathfrak{v}\mathfrak{q}')$ in (25c) kann nicht verschwinden, solange $q' \leqq c$ bleibt. Die rechte Seite bleibt daher positiv und endlich, bis sie für $q' = c$ verschwindet.

---

bezogen auf ein nicht mitbewegtes System, ist z. B. nach wie vor die Vektorsumme aus seiner Geschwindigkeit gegen das System und der des Stabes; die Erklärung des Michelsonschen Versuches, wie wir sie in § 2 gegeben haben, bleibt daher (abgesehen von der Modifikation durch die Kontraktionshypothese) auch in der Relativitätstheorie richtig.

Bis dahin muß auch die linke Seite positiv und endlich, also $q < c$ sein; die Werte $q' = c$ und $q = c$ entsprechen einander. Zwei Unterlichtgeschwindigkeiten addiert geben daher immer eine Unterlichtgeschwindigkeit. Die Addition der Lichtgeschwindigkeit zu einer Unterlichtgeschwindigkeit liefert die Lichtgeschwindigkeit. Die letztere spielt in der Physik durchaus die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeit, insofern man sie durch keine Häufung von Unterlichtgeschwindigkeiten jemals erreichen kann. Darum bildet auch die Festsetzung $v < c$ keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Aber nicht nur die Geschwindigkeiten der Körper, sondern auch die physikalischer Wirkungen aller Art, mögen sie sich im Vakuum oder in der Materie fortpflanzen, können die Lichtgeschwindigkeit c nicht überschreiten. Pflanzte sich nämlich die Wirkung eines zur Zeit t im Punkte A ($x = x_A$, $y = z = 0$) eintretenden Ereignisses im System K mit der Geschwindigkeit $V > c$ nach dem Punkt B ($x = x_B$, $y = z = 0$) fort, so träfe sie dort um die Zeit

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{V}$$

später ein. Nach den letzten der Gleichungen (XI) wäre dann die Zeitdauer dieser Fortpflanzung, bezogen auf K':

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Man könnte somit durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für die Unterlichtgeschwindigkeit v erreichen, daß $\Delta t'$ Null und selbst negativ wird, d. h. es gäbe berechtigte Systeme, in welchen die Wirkung in B zeitlich der Ursache in A vorausgeht; das ist aber unmöglich, weil das in Frage kommende Naturgesetz im Widerspruch zum Relativitätsprinzip beim Übergang von K zu K' nicht unverändert bliebe, wenn Ursache und Wirkung in zeitlicher und deshalb auch in kausaler Beziehung dabei ihre Rollen vertauschten. Nur scheinbar wird diese Folgerung aus dem Relativitätsprinzip durch die Tatsache widerlegt, daß in dispergierenden

Körpern für manche Spektralbereiche der Brechungsindex $n < 1$, also die „Lichtgeschwindigkeit“ $\frac{c}{n} > c$ ist. $\frac{c}{n}$ ist nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Phasen periodischer Wellen im stationären Zustande, d. h. wenn diese sich über den ganzen Raum ausgebreitet haben, fortschreiten. Für die Ausbreitung einer plötzlich auftretenden elektromagnetischen Störung hat sie keine unmittelbare Bedeutung. Der erste Vorläufer solcher Störung, der Wellenkopf, pflanzt sich vielmehr der Elektronentheorie zufolge stets mit der Lichtgeschwindigkeit c fort [Sommerfeld[4])]. Daß jede Wirkung durch das Vakuum, also auch die Gravitation, mit Lichtgeschwindigkeit c fortschreiten muß, wenn anders das Relativitätsprinzip richtig sein soll, folgt aus der Überlegung, daß man sonst durch Übertragung der zur Gleichung (XI) führenden Betrachtung eine Substitution erhielte, welche sich durch den Wert von c von (XI) unterschiede, mit (XI) zusammen daher wieder ein ausgezeichnetes System definierte.

§ 8. Minkowskis geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation.

Das Relativitätsprinzip, wie es im § 6 ausgesprochen und in der Lorentz-Transformation (XI) mathematisch formuliert wurde, enthält die Grundlagen der Relativitätstheorie vollständig; alle Folgerungen, die wir später ziehen werden, lassen sich aus dem Obigen ableiten. Doch werden die Rechnungen dabei zum Teil wenig elegant und umständlich, vor allem, weil man bei jedem Vektor die Komponente parallel zur Geschwindigkeit v anders umrechnen muß, als die dazu senkrechten. Es ist das große Verdienst des so früh verstorbenen Göttinger Mathematikers Hermann Minkowski, eine geometrische Interpretation geschaffen zu haben, welche diese Schwierigkeit umgeht und wegen der Eleganz, welche sie den Rechnungen der Relativitätstheorie verleiht, ein fast unentbehrliches Hilfsmittel für deren sichere Handhabung bildet.

Im allgemeinen werden von einer Lorentz-Transformation alle drei Koordinaten betroffen. Nur unsere spezielle Annahme über die Lage der Achsenkreuze in den Systemen K und K' brachte für y- und z-Koordinate die identische Transformation in (XI)

hervor. Da aber auch die Zeit verändert werden muß, so sieht man leicht, daß eine geometrische Analogie nur in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit bestehen kann. Daß eine solche unserer Anschauung unzugänglich ist, darf uns nicht schrecken; es handelt sich dabei nur um die symbolische Darstellung gewisser analytischer Beziehungen zwischen vier Variablen. Wir bezeichnen diese Mannigfaltigkeit als „die Welt“ und wählen als „Weltkoordinaten“ die Raumkoordinaten x, y, z und die Zeitkoordinate

$$u = ct \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Die x, y, z-Achsen sollen aufeinander senkrecht stehen; die u-Achse vorläufig auch auf den drei genannten Achsen, d. h. in der xu-Ebene sollen zunächst x und u gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten sein, und Entsprechendes soll in der yu- und zu-Ebene gelten. Es gibt dann sechs paarweise aufeinander senkrecht stehende Koordinatenebenen und vier aufeinander senkrechte (dreidimensionale) Koordinatenräume. Einen Punkt (x, y, z, u) dieser Mannigfaltigkeit nennen wir einen „Weltpunkt“; er repräsentiert ein am Ort x, y, z zur Zeit $t = \frac{u}{c}$ stattfindendes Ereignis.

Für jeden materiellen Punkt sind die Raumkoordinaten Funktionen der Zeit; er bestimmt also eine Kurve in der Welt, eine „Weltlinie“. Bei gleichförmiger Geschwindigkeit q ist sie eine Gerade, deren Winkel gegen die u-Achse gleich $arc\,tg\,\frac{q}{c}$, also, weil $q < c$, kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist; im allgemeinen ist sie eine beliebige krumme Linie, deren Neigung gegen die u-Achse aber nie den angegebenen Betrag erreicht.

In dem speziellen Fall des § 6, daß die x- und x'-Achse der Translationsgeschwindigkeit parallel ist, spielt sich die Transformation allein in der xu-Ebene ab, welche wir als Zeichenebene benutzen wollen (Fig. 5). In dieser zeichnen wir die gleichseitigen Hyperbeln:

$$x^2 - u^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

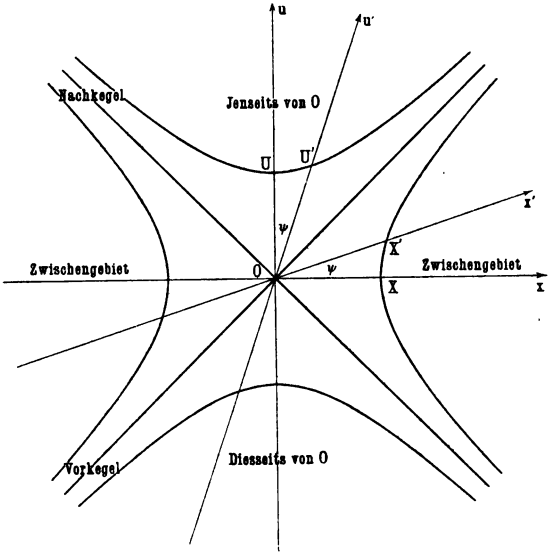
$$x^2 - u^2 = +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27\,a)$$

sowie ihr gemeinsames Asymptotenpaar:

$$x^2 - u^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27\,b)$$

Vom Nullpunkt O ziehen wir nach irgend einem Punkte U' desjenigen Astes der ersteren, für welchen u positiv ist, die Gerade; sodann eine zweite Gerade nach einem Punkte X' des Astes $x > 0$ der zweiten Hyperbel; X' bestimmen wir so, daß die Asymptote $x = u$ die Winkelhalbierende wird, d. h. daß OU' und OX' konjugierte Durchmesser der Hyperbel (27) werden. Fällt U' auf die u-Achse nach U, so fällt X' mit X zusammen. Die Lorentz-Transformation XI besteht darin, daß man an Stelle der

Fig. 5.



Geraden OU und OX als Achsen OU' und OX', und statt der Strecken OU und OX als Einheiten die Strecken OU' und OX' verwendet.

In der Tat: Die Geraden OU' und OX' haben die Gleichungen

$$x = \beta u, \quad u = \beta x, \quad |\beta| < 1.$$

Die Koordinaten von U' und X' sind infolgedessen nach (27) und (27a):

$$\left.\begin{aligned} u_{U'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; x_{U'} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ u_{X'} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; x_{X'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27\,c)$$

Nun soll aber im gestrichenen System

$$u'_{U'} = x'_{X'} = 1,\ u'_{X'} = x'_{U'} = 0$$

werden. Die vier bei einer linearen Transformation von x, u auf x', u' verfügbaren Konstanten sind hierdurch eindeutig bestimmt; die Transformationsgleichungen müssen also lauten:

$$x' = \frac{x - \beta u}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad u' = \frac{u - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

sie gehen nach (26) in (XI) über, wenn man

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

setzt. Der Ausdruck $x^2 - u^2$, und ebenso $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$, bleibt daher bei der Substitution (28) invariant. Die Gleichungen der beiden Hyperbeln und ihres Asymptotenpaares lauten im gestrichenen System ebenso wie im ungestrichenen. Der Winkel ψ in Fig. 5 ist durch die Gleichung

$$tg\,\psi = \beta = \frac{v}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

bestimmt.

Offenbar kann man nach jedem Weltpunkt W der UX-Ebene, für welchen $u^2 > x^2$ ist, von O aus eine Zeitachse ziehen, mit der Richtung $\overrightarrow{OW}$, wenn $u > O$, mit der Richtung $\overrightarrow{WO}$, wenn $u < O$ ist; denn es gibt stets einen zu OW konjugierten Durchmesser als x'-Achse. Umgekehrt kann man jeden Weltpunkt, für welchen $u^2 < x^2$ ist, mit O „gleichzeitig" machen, indem man die Gerade OW mit passender Richtung zur x'-Achse und den ihr konjugierten Durchmesser zur u'-Achse wählt.

Um die allgemeine Lorentz-Transformation darzustellen, bei welcher das räumliche Achsenkreuz x, y, z beliebig zur Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ orientiert ist, haben wir diese Konstruktion vierdimensional auszugestalten. An Stelle der Hyperbeln treten dann der zweischalig-hyperbolische Raum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

und der einschalig-hyperbolische Raum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1 \quad \ldots\ldots \quad (31\,a)$$

beide werden von dem Kegelraum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31\,b)$$

asymptotisch berührt. Die Hyperbeln in Fig. 5 und ihre Asymptoten sind die Schnitte dieser dreidimensionalen Räume mit der ux-Ebene.

Jetzt wählen wir auf der positiven Schale des zweischaligen Hyperbelraumes (31) einen beliebigen Punkt U' mit den Koordinaten $x_{U'}$, $y_{U'}$, $z_{U'}$, $u_{U'}$ und ziehen nach ihm von O aus die Gerade. Wir konstruieren sodann den diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserraum

$$x x_{U'} + y y_{U'} + z z_{U'} - u u_{U'} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31\,c)$$

welcher den einschaligen Hyperbelraum (31 a) in einem Ellipsoid schneidet. Fällt U' in den Scheitel U des ersteren Hyperbelraumes, so wird der konjugierte Durchmesserraum zum xyz-Raum ($u = 0$) und das Ellipsoid zur Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (31\,d)$$

alle Strecken von O nach einem Punkte dieser Kugel haben die gleiche Länge 1; sie ist die Maßfläche für Strecken im Raume xyz. Die allgemeine Lorentz-Transformation besteht nun darin, daß man statt der Geraden OU als u-Achse und der Strecke OU als Einheit, sowie statt des xyz-Raumes mit der Kugel (31d) als Maßfläche die Gerade OU' mit OU' als Einheitsstrecke zur u'-Achse und den ihr konjugierten Durchmesserraum mit dem genannten Ellipsoid als Maßfläche zum zugehörigen $x'y'z'$-Raum macht. (Die letztere Bedingung drückt aus, daß die Gleichung des Ellipsoids

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

lauten soll).

Verändern wir zum Beweise zunächst das Koordinatensystem $x'y'z'$ so, daß $x'^2 + y'^2 + z'^2$ invariant bleibt; dasselbe gilt dann auch für den Ausdruck $x'^2 + y'^2 + z'^2 - u^2$. Wir können es so erreichen, daß der Schnitt des $x'y'z'$-Raumes mit der durch die u- und u'-Achse gelegten Ebene zur x'-Achse wird. Durch eine analoge Drehung des Koordinatensystems xyz verlegen wir die x-Achse in dieselbe Ebene. Dann aber haben wir dieselben Verhältnisse wie in Fig. 5; OX' und OU' sind nach Konstruktion

konjugierte Durchmesser der Hyperbel $x^2 - u^2 = -1$ geworden, und da $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ gegen die dort dargestellte spezielle Transformation invariant ist, so gilt dies auch für die soeben beschriebene verallgemeinerte Konstruktion, welche sich dadurch als eine Lorentz-Transformation erweist. Es gibt daher so viel berechtigte Systeme, wie Punkte in der positiven Schale des Hyperbelraumes (31), d. h. dreifach unendlich viele, wie schon oben erwähnt. Die Geschwindigkeit beider Systeme gegeneinander wird durch den Winkel ψ zwischen der u- und der u'-Achse gemäß Gleichung (30) bestimmt.

Der Kegelraum (31 b) teilt die Welt in drei Teile:

1. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u > 0$. Nach jedem Weltpunkt W dieses Gebietes kann man eine Zeitachse u' mit der Richtung $\overrightarrow{OW}$ legen, es enthält die Weltpunkte „jenseits von O", d. h. diejenigen, welche in allen berechtigten Systemen später als O sind.

2. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u < 0$. Die Weltpunkte dieses Gebietes sind in allen Systemen früher als O, liegen „diesseits von O". Man kann nach ihnen Zeitachsen mit der Richtung $\overrightarrow{WO}$ ziehen.

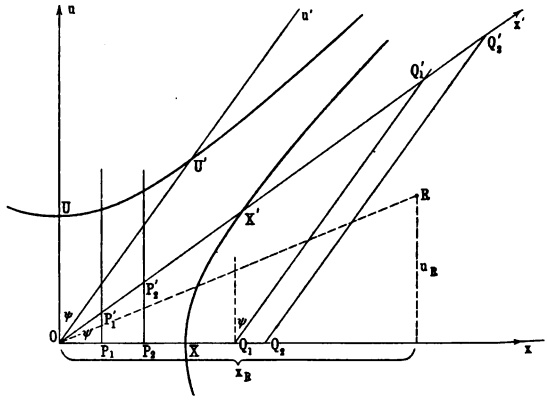
3. $u^2 < x^2 + y^2 + z^2$. Von den Punkten dieses „Zwischengebietes" kann man drei beliebige mit O gleichzeitig machen, denn sie bestimmen mit O zusammen einen ebenen Raum, welcher mit dem ihm in bezug auf den Hyperbelraum (31) konjugierten Durchmesser ein berechtigtes Bezugssystem bildet. In diesen haben dann die drei Weltpunkte mit O die Zeit $t = u/c = 0$ gemeinsam.

An dem Kegelraum (31 b) selbst unterscheiden wir den „Vorkegel", für welchen $u < 0$, und den „Nachkegel", für welchen $u > 0$ ist. Der erstere umfaßt diejenigen Weltpunkte, welche Ereignisse darstellen, von denen eine etwaige, mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitende Wirkung im Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zur Zeit $t = 0$ ankommt. Der Nachkegel stellt dagegen die Gesamtheit der Ereignisse dar, welche sich mit dem Eintreffen einer etwaigen, vom Ereignis O ausgehenden Lichtwirkung gleichzeitig abspielen. Wir sagen, die ersteren „senden Licht nach O", die letzteren „empfangen Licht von dort".

Kehren wir noch einmal zu der speziellen Transformation (28) zurück. Die Endpunkte eines in K ruhenden, der x-Achse

parallelen Stabes beschreiben geradlinige, der u-Achse parallele Weltlinien ($P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$ in Fig. 6). Das Verhältnis $\frac{P_1 P_2}{0X}$ gibt seine Ruhlänge s_0 an. Ruht ein zweiter Stab in K', so

Fig. 6.



sind die Weltlinien seiner Endpunkte zwei zur u'-Achse parallele Gerade ($Q_1 Q_1'$ und $Q_2 Q_2'$) und seine Ruhlänge s_0 wird durch den Quotienten $\frac{Q_1' Q_2'}{0X'}$ dargestellt. Die Länge des ersten Stabes in K' ist aber $s' = \frac{P_1' P_2'}{0X'}$ denn $\frac{0P_1'}{0X'}$ und $\frac{0P_2'}{0X'}$ sind die x'-Koordinaten seiner Endpunkte für den gleichen Wert (0) von t'. Die Länge des zweiten Stabes in K ist analog $s = \frac{Q_1 Q_2}{0X}$. Nun ist nach (27 c):

$$\frac{0X'}{0X} = \sqrt{x_{X'}^2 + u_{X'}^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}},$$

ferner nach Fig. 6 und (30):

$$\frac{P_1' P_2'}{P_1 P_2} = \frac{1}{\cos\psi} = \sqrt{1+\beta^2}, \quad \frac{Q_1 Q_2}{Q_1' Q_2'} = \frac{0 Q_1}{0 Q_1'} = \frac{\sin(\measuredangle\, 0\, Q_1' Q_1)}{\sin(\measuredangle\, 0\, Q_1 Q_1')}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Also ist für den ersten Stab

$$\frac{s'}{s_0} = \frac{P_1'P_2'}{OX'} \cdot \frac{OX}{P_1P_2} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \cdot \cdot \quad (32)$$

und für den zweiten

$$\frac{s}{s_0} = \frac{Q_1Q_2}{OX} \cdot \frac{OX'}{Q_1'Q_2'} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \cdot \cdot \quad (32a)$$

Wir bestätigen so den schon in § 7 gefundenen Satz, daß ein Körper, von dem mitbewegten System aus betrachtet, länger erscheint, als von jedem andern. Da in Fig. 6 $Q_1'Q_2' : OX' = P_1P_2 : OX$ gewählt ist, so ist, wie man sieht, $Q_1Q_2 < P_1P_2$.

Jetzt mögen die Weltpunkte O und R in Fig. 6 zwei in K ruhende, materielle Punkte A und B darstellen, den ersteren zur Zeit t $(= 0)$, in welchem von ihm irgend eine physikalische Wirkung ausgeht, den letzteren zu der Zeit t_R, in welcher diese Wirkung B erreicht. Könnte nun die Geschwindigkeit V, mit der sie fortschreitet, größer sein wie c, so wäre

$$u_R = ct_R = \left|x_R\right| \frac{c}{V} < \left|x_R\right|;$$

R gehörte dem Zwischengebiet von O an, wie dies auch in Fig. 6 gezeichnet ist. Es gäbe dann stets berechtigte Systeme, in denen dann wie im System K' der Figur $u_R' < 0$, d. h. R früher als O wäre; die Wirkung käme also in B an, bevor sich ihre Ursache in A zugetragen hat. Diese geometrische Überlegung widerlegt somit nochmals die Möglichkeit einer Überlichtgeschwindigkeit (vgl. S. 45). Es liegen eben alle Weltpunkte, welche O kausal beeinflussen kann, jenseits oder auf dem Nachkegel, alle, von denen O einen solchen Einfluß erleiden kann, diesseits oder auf dem Vorkegel von O. Punkte des Zwischengebietes können dagegen nie mit O in kausalem Zusammenhang stehen.

§ 9. Die Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung.

Analytisch eleganter noch ist es, wenn man als Zeitvariable die imaginäre Größe

$$l = iu = ict \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

benutzt, wobei freilich jedem reellen Weltpunkt ein imaginärer Punkt der x, y, z, l-Mannigfaltigkeit entspricht. Dabei wird

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2 \quad . \; . \; (33\,a)$$

Eine Lorentz-Transformation ist, wie wir in § 6 sahen, durch die Invarianz dieses Ausdruckes gekennzeichnet.

Betrachten wir zunächst wieder den einfachen Fall der in den (XI) und (28) ausgedrückten Transformation, von der nur x und t betroffen wird. Führen wir statt u in (28) l ein, so finden wir:

$$x' = \frac{x + i\beta l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad l' = \frac{l - i\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Nun können wir einen imaginären Winkel φ so definieren, daß

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \; . \; . \quad (35)$$

wird. Mit dem Winkel ψ der Fig. 5 und 6 hängt er nach (30) zusammen durch die Beziehung

$$tg\,\varphi = i\beta = i\frac{v}{c} = i\,tg\,\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35\,a)$$

Ersetzt man in (34) β durch φ, so findet man die Gleichungen:

$$x' = x\cos\varphi + l\sin\varphi, \quad l' = -x\sin\varphi + l\cos\varphi \quad (34\,a)$$

und als ihre Umkehrungen:

$$x = x'\cos\varphi - l'\sin\varphi, \quad l = x'\sin\varphi + l'\cos\varphi \quad (34\,b)$$

Wären l und φ reelle Größen, so bedeutete dies, daß das Koordinatensystem x', l' aus dem System x, l durch Drehung (im positiven Sinne) um den Winkel φ hervorgeht. Aber auch hier können wir diese Ausdrucksweise unbedenklich beibehalten. Die spezielle Lorentz-Transformation (XI) ist eine Drehung des Achsenkreuzes in der xl-Ebene um den durch (35) definierten, imaginären Winkel φ*).

*) Der Unterschied der Geometrien im x, y, z, l- und im x, y, z, u-Raume ist im Grunde der folgende: Im ersteren haben wir mit der euklidischen Geometrie, aber mit einer imaginären Koordinate zu tun; im letzteren sind die Koordinaten reell, dafür aber wird die Geometrie nichteuklidisch [Klein][1]). Der imaginären, euklidischen Drehung um φ entspricht die reelle, nichteuklidische Drehung um ψ.

Führt man mehrere solche Transformationen in der xl-Ebene mit den Drehwinkeln φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$. hintereinander aus, so resultiert eine einzige Drehung um den Winkel

$$\varphi = \Sigma \varphi_n.$$

Die Geschwindigkeit des $n$ten gegen das $(n-1)$te System, ist nach (35a):

$$v_n = -ic\,tg\,\varphi_n,$$

die des letzten gegen das erste entsprechend

$$v = -ic\,tg\,(\Sigma\,\varphi_n).$$

Die Funktion

$$tg\,x = -i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

wächst aber, wenn ihr Argument die rein imaginären Werte von Null bis $i\infty$ durchläuft, von Null nur bis zum Werte i. Daher ist unter allen Umständen $tg\,(\Sigma\,\varphi_n) < i$ und $v < c$. Die Lichtgeschwindigkeit bleibt, wie wir schon in § 7 sahen, unerreichbar.

Beschränkt sich $\Sigma\,\varphi_n$ auf zwei Glieder, so folgt:

$$v = -ic\,tg\,(\varphi_1 + \varphi_2) = -ic\,\frac{tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2}{1 - tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Das Einsteinsche Additionstheorem für gleichgerichtete Geschwindigkeiten [vgl. die erste der Beziehungen (25a)] geht so unmittelbar aus dem Additionstheorem der Tangensfunktion hervor [2]).

Schon in § 8 (S. 52) sahen wir, daß sich die allgemeinste Lorentz-Transformation auf Drehungen der räumlichen Achsenkreuze in den Systemen K und K', sowie auf die spezielle Transformation (28) zurückführen läßt, welche mit (XI) und (34) identisch ist. Alle Eigentümlichkeiten der allgemeinen können wir daher auch schon an der letzteren Transformation erkennen; so muß z. B. auch die allgemeine sich stets als imaginäre Drehung in der durch die l- und l'-Achse bestimmten Ebene auffassen lassen, zu welcher nur noch die unwesentlichen reellen Drehungen der Koordinatensysteme x, y, z und x', y', z' hinzutreten.

Analytisch eleganter aber ist es, ganz allgemein diejenigen linearen Transformationen des Weltkoordinatensystems x, y, z, l

zu untersuchen, welche eine Lorentz-Transformation darstellen, d. h. bei denen der Ausdruck (33a) $x^2 + y^2 + z^2 + l^2$ invariant bleibt. Diese Aufgabe entspricht durchaus der Frage nach den Substitutionen, welche eine Drehung des Raumkoordinatensystems x, y, z darstellt. Denn diese sind durch die Invarianz von $x^2 + y^2 + z^2$ gekennzeichnet. (Vgl. den Anhang unter b.)

Soll bei der linearen Substitution

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1^{(1)} x + \alpha_1^{(2)} y + \alpha_1^{(3)} z + \alpha_1^{(4)} l \\ y' &= \alpha_2^{(1)} x + \alpha_2^{(2)} y + \alpha_2^{(3)} z + \alpha_2^{(4)} l \\ z' &= \alpha_3^{(1)} x + \alpha_3^{(2)} y + \alpha_3^{(3)} z + \alpha_3^{(4)} l \\ l' &= \alpha_4^{(1)} x + \alpha_4^{(2)} y + \alpha_4^{(3)} z + \alpha_4^{(4)} l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

$x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + l'^2$ werden, so müssen, wie die Rechnung zeigt, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum_n \alpha_n^{(m)2} = 1 \qquad m = 1, 2, 3, 4 \\ &\textstyle\sum_n \alpha_n^{(m)} \alpha_n^{(o)} = 0 \qquad m, o = 1, 2, 3, 4 \qquad m \gtrless o \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36a)$$

erfüllt sein, welche durchaus den Orthogonalitätsbedingungen (S. 190) analog gebaut sind. Von den 16 Koeffizienten sind also nur 6 willkürlich*). Fassen wir die Gleichungen (36) einmal mit $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_4^{(1)}$ zusammen, dann mit $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$, $\alpha_4^{(2)}$ usw., so findet man als ihre Auflösungen nach den ungestrichenen Größen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1^{(1)} x' + \alpha_2^{(1)} y' + \alpha_3^{(1)} z' + \alpha_4^{(1)} l' \\ y &= \alpha_1^{(2)} x' + \alpha_2^{(2)} y' + \alpha_3^{(2)} z' + \alpha_4^{(2)} l' \\ z &= \alpha_1^{(3)} x' + \alpha_2^{(3)} y' + \alpha_3^{(3)} z' + \alpha_4^{(3)} l' \\ l &= \alpha_1^{(4)} x' + \alpha_2^{(4)} y' + \alpha_3^{(4)} z' + \alpha_4^{(4)} l' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36b)$$

so daß nach Analogie von (36a) auch

$$\sum_n \alpha_m^{(n)2} = 1, \quad \sum_n \alpha_m^{(n)} \alpha_0^{(n)} = 0 \quad \ldots \quad (36c)$$

ist.

---

*) Von diesen sechs Freiheitsgraden kommen drei auf Drehungen des räumlichen Achsenkreuzes xyz, so daß nur drei für den Übergang von einem berechtigten System zum anderen übrig bleiben. (Vgl. § 6 und 8.)

Die Determinante der Koeffizienten nennen wir A:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_4^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} \\ \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} \\ \alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix} = \pm\, \alpha_1^{(1)}\, \alpha_2^{(2)}\, \alpha_3^{(3)}\, \alpha_4^{(4)} \quad . \quad . \quad (37)$$

ihre Unterdeterminanten bezeichnen wir, wie üblich, mit $A_m^{(n)}$. Die Auflösung von (36) nach x, y, z, l muß nun die Form haben:

$$A\,x = A_1^{(1)}\,x' + A_2^{(1)}\,y' + A_3^{(1)}\,z' + A_4^{(1)}\,l' \text{ usw.},$$

daher muß nach (36 b)

$$\alpha_m^{(n)} = A_m^{(n)} : A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

sein. Setzt man diese Werte in (37) ein, so folgt für die Determinante der Unterdeterminanten:

$$\pm\, A_1^{(1)}\, A_2^{(2)}\, A_3^{(3)}\, A_4^{(4)} = A^5.$$

Nach einem bekannten Satze ist diese aber, wenn die Zahl der Zeilen und Kolonnen n ist, A^{n-1}, in unserem Falle also A^3, deshalb muß

$$A = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

sein; denn $A = -1$ ist ausgeschlossen, weil A eine stetige Funktion der Koeffizienten ist und bei der identischen Transformation $x' = x$ usw. offenbar den Wert $+1$ hat. Nach (38) ist dann

$$\alpha_m^{(n)} = A_m^{(n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Wir können die Transformationen (36) und (36 b) zusammenfassen in das ohne weitere Erklärung verständliche Schema:

	x'	y'	z	l'
x	$\alpha_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$
y	$\alpha_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$
z	$\alpha_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$
l	$\alpha_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$

. . . . . (XII)

Soll die Substitution (XII) eine Lorentz-Transformation darstellen, so müssen die Koeffizienten 1. den Ortho-

gonalitätsbedingungen (36a) genügen; 2. müssen diejenigen, welche den Index 4 einmal enthalten, rein imaginär, alle anderen reell sein; 3. muß ihre Determinante und α_{44} positiv sein. Die Bedingungen 2. haben wir hinzugefügt, damit aus reellen Werten x, y, z und einem imaginären Wert von l immer wieder für x', y', z' reelle und für l' imaginäre Werte hervorgehen. $\alpha_4^{(4)}$ aber muß positiv sein, weil $\alpha_4^{(4)}$ stets der Kosinus des imaginären Winkels φ zwischen der l- und der l'-Achse ist, also

$$\alpha_4^{(4)} = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man die allgemeine Transformation in der oben ausgeführten Weise auf die spezielle Substitution (34) zurückführt. Die spezielle Transformation (34), bei welcher die y- und z-Koordinate ungeändert bleiben, findet man, wenn man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(3)} = 1, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_4^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ -\alpha_4^{(1)} = \alpha_1^{(4)} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (41)$$

alle anderen Koeffizienten gleich Null setzt.

Für die Unterdeterminanten zweiter Ordnung $A_{m\,n}^{m'\,n'}$ gelten den Formeln (36a und c) entsprechende Beziehungen. (Die oberen Indices beziehen sich stets auf die Zeilen, die unteren auf die Kolonnen von A.) Wie die Koeffizienten selbst sind diese Unterdeterminanten reell, wenn der Index 4 in ihnen keinmal oder zweimal, rein imaginär, wenn er einmal auftritt.

Nach einem bekannten Satze ist für eine beliebige Determinante A

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \alpha_3^{(3)} & \alpha_3^{(4)} \\ \alpha_4^{(3)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix}.$$

Nach (39) und (40) folgt hieraus:

$$A_{12}^{12} = A_{34}^{34};$$

oder allgemeiner, wenn wir mit $B_{m\,n}^{m'\,n'}$ die $A_{m\,n}^{m'\,n'}$ ergänzende Unterdeterminante bezeichnen:

$$A_{m\,n}^{m'\,n'} = B_{m\,n}^{m'\,n'} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Weiter sagt ein bekannter Satz über die Darstellbarkeit einer Determinante als Summe aus Produkten der Unterdeterminanten:

$$A = \sum_m \sum_n A_{m\,n}^{m'\,n'}\ B_{m\,n}^{m'\,n'}.$$

Gemäß (39) und (42) schließen wir hieraus:

$$\sum_m \sum_n A_{m\,n}^{m'\,n'2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Denken wir uns ferner die Determinante $\mathfrak{A}$ so aus A abgeleitet, daß man die Glieder der zweiten Zeile durch die entsprechenden der dritten ersetzt; sie ist natürlich Null. Also gilt nach dem soeben benutzten Satz:

$$\sum_m \sum_n \mathfrak{A}_{m\,n}^{12}\ \mathfrak{B}_{m\,n}^{12} = 0.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{A}_{m\,n}^{12} = A_{m\,n}^{12}, \qquad \mathfrak{B}_{m\,n}^{12} = B_{m\,n}^{13},$$

also nach (42):

$$\sum_m \sum_n A_{m\,n}^{12}\ A_{m\,n}^{13} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Endlich denken wir uns die Determinante $\mathfrak{A}$ so gebildet, daß in A nicht nur die Glieder der zweiten durch die der dritten Zeile, sondern auch die der ersten durch die entsprechenden der vierten ersetzt werden. Dann ist:

$$\mathfrak{A}_{m\,n}^{12} = A_{m\,n}^{12}, \qquad \mathfrak{B}_{m\,n}^{12} = B_{m\,n}^{43},$$

also

$$\sum_m \sum_n A_{m\,n}^{12}\ A_{m\,n}^{34} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Man kann wegen der Gleichwertigkeit an Zeilen und Kolonnen in (43), (44), (45) die oberen mit den unteren Indices vertauschen.

Ordnet man die Unterdeterminanten nach dem Schema:

A_{14}^{14}	A_{24}^{14}	A_{34}^{14}	A_{23}^{14}	A_{31}^{14}	A_{12}^{14}
A_{14}^{24}	A_{24}^{24}	A_{34}^{24}	A_{23}^{24}	A_{31}^{24}	A_{12}^{24}
A_{14}^{34}	A_{24}^{34}	A_{34}^{34}	A_{23}^{34}	A_{31}^{34}	A_{12}^{34}
A_{14}^{23}	A_{24}^{23}	A_{34}^{23}	A_{23}^{23}	A_{31}^{23}	A_{12}^{23}
A_{14}^{31}	A_{24}^{31}	A_{34}^{31}	A_{23}^{31}	A_{31}^{31}	A_{12}^{31}
A_{14}^{12}	A_{24}^{12}	A_{34}^{12}	A_{23}^{12}	A_{31}^{12}	A_{12}^{12}

so sagen die Gleichungen (43), (44) und (45) und ihre (nicht hingeschriebenen) Verallgemeinerungen aus: Quadriert und addiert man die Glieder einer Zeile oder Kolonne, so erhält man den Wert 1; multipliziert man entsprechende Glieder zweier verschiedener Zeilen oder Kolonnen, so findet man bei der Addition den Wert Null.

Die Koeffizienten α_m^n und die Unterdeterminanten $A_{m,n}^{m',n'}$ werden im folgenden bei der Definition der Vierer- und Sechservektoren Verwendung finden.

Bei der speziellen Transformation (34) sind [vgl. (41)] die Unterdeterminanten:

$$\left.\begin{aligned} A_{14}^{14} = A_{23}^{23} &= 1, \\ A_{12}^{12} = A_{31}^{31} = A_{24}^{24} = A_{34}^{34} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cos\varphi \\ A_{24}^{12} = A_{31}^{34} = -A_{12}^{24} = -A_{34}^{31} &= \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (46)$$

alle anderen Null. Man bestätigt an diesen Werten leicht die angegebenen Regeln.

IV. Weltvektoren und -tensoren.

§ 10. Vierer- und Sechservektoren.

Im dreidimensionalen Raum ist ein Vektor $\mathfrak{A}$ durch die drei Komponenten $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ definiert, welche sich bei der Drehung des Achsenkreuzes wie die Koordinaten selbst transformieren. Doch gibt es zwei durch ihre Symmetrie voneinander verschiedene Arten. Ein polarer Vektor wird durch eine Strecke mit Richtungssinn dargestellt; jede Ebene durch diese Strecke ist Symmetrieebene; ein axialer dagegen durch ein ebenes Flächenstück mit Umlaufssinn; er hat als einzige Symmetrieebene diese Ebene selbst. Infolgedessen sollten eigentlich für die Transformation des letzteren Formeln gelten, in denen statt der Koeffizienten der Koordinatentransformation die Unterdeterminanten aus diesen auftreten; und nur weil nach den Orthogonalitätsbedingungen jede Unterdeterminante gleich dem entsprechenden Koeffizienten ist, tritt dieser Unterschied nicht hervor. Die ein-

fachsten Repräsentanten beider Arten sind die Translations- und die Drehgeschwindigkeit. Außer den Vektoren treten noch als Tensoren bezeichnete gerichtete Größen auf (vgl. den Anhang). Es gilt jetzt, den Vektor- und Tensorbegriff vierdimensional zu erweitern. Der Leitstern dabei ist die formale Analogie der Lorentz-Transformation (XII) mit einer Drehung des Achsenkreuzes in drei Dimensionen.

a) Vierervektoren. Wir legen zunächst die Mannigfaltigkeit x, y, z, l zugrunde und bezeichnen als Vierervektor P den Inbegriff von vier Komponenten P_x, P_y, P_z, P_l, welche sich bei der Substitution (XII) wie die entsprechenden Koordinaten transformieren sollen, also:

	$P_{x'}$	$P_{y'}$	$P_{z'}$	$P_{l'}$
P_x	$\alpha_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$
P_y	$\alpha_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$
P_z	$\alpha_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$
P_l	$\alpha_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$

. . . . . (47)

Von diesen Komponenten sollen entweder die drei räumlichen P_x, P_y, P_z reell und P_l rein imaginär sein, oder umgekehrt. Die Transformation ändert wegen der Realitätsverhältnisse der Koeffizienten $\alpha_m^{(n)}$ nichts an dieser Festsetzung. Alle Vierervektoren und nur solche werden mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Bei zwei Vierervektoren P und Φ ist das skalare Produkt

$$(P\Phi) = P_x\Phi_x + P_y\Phi_y + P_z\Phi_z + P_l\Phi_l \quad . . \quad (48)$$

gegen die Lorentz-Transformation wegen der Orthogonalitätsbedingungen (36a) invariant; dasselbe gilt von dem absoluten Betrage eines Vierervektors P

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_l^2} \quad . . . . . \quad (49)$$

Offenbar ist der Vierervektor durch eine gerichtete Strecke in vier Dimensionen dargestellt und bildet so das Analogon zum polaren Vektor in drei Dimensionen.

Wir werden im folgenden meist mit Vierervektoren zu tun haben, bei denen die l-Komponente imaginär, die drei anderen demnach reell sind. Gehen wir nach (33) zu der reellen Zeitvariablen $u = -il$ über, so haben wir statt P_l die reelle Komponente

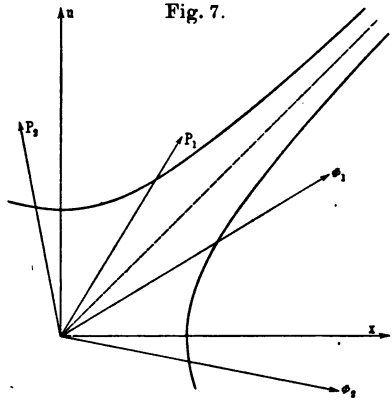
$$P_u = -iP_l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

einzuführen. Das Quadrat des absoluten Wertes von P ist dann

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - P_u^2 \quad \ldots\ldots \quad (49\,a)$$

je nachdem es positiv oder negativ ist, nennen wir den Vektor „raumartig" oder „zeitartig". Stellen wir ihn nämlich als eine vom Punkte O in Fig. 5 gezogene Strecke dar, so weist er im ersten Falle nach einem Weltpunkte des Zwischengebietes, im zweiten nach einem Punkte diesseits oder jenseits von O. Ein raumartiger Vektor hat den Betrag R, wenn er bei dieser Darstellung bis zu einem Punkte des Hyperbelraumes $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = R^2$ reicht; ein zeitartiger hat den Betrag iR, wenn er nach einem Weltpunkte des Hyperbelraumes $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -R^2$ weist.

Fig. 7.



Ist das skalare Produkt $(P\Phi) = 0$, so sagen wir, die Vektoren P und Φ stehen aufeinander senkrecht. Doch ist dieser Ausdruck keineswegs im Sinne der Euklidischen Geometrie zu verstehen; deuten wir beide als von O ausgehende Strecken, so sagt diese Bedingung vielmehr nach (31 c), daß Φ in dem zu P bezüglich der Hyperbelräume (31) und (31 a) konjugierten Durchmesserraum liegt. Im Sinne dieser Festsetzung ist somit jedes berechtigte System x, y, z, u orthogonal. Zwei aufeinander senkrechte Vektoren können nicht beide zeitartig, wohl aber beide raumartig sein. In Fig. 7 stehen P_1, Φ_1 sowie P_2, Φ_2 aufeinander senkrecht. P_1 und P_2 sind zeitartig, Φ_1 und Φ_2 raumartig.

Als Beispiel eines zeitartigen Vierervektors führen wir hier die Vierergeschwindigkeit Y an, deren Komponenten durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Y_x &= \frac{q_x}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \qquad Y_y = \frac{q_y}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \qquad Y_z = \frac{q_z}{\sqrt{c^2 - q^2}} \\ Y_l &= \frac{ic}{\sqrt{c^2 - q^2}} \qquad \left(\text{oder } Y_u = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

auf die Geschwindigkeit q eines materiellen Punktes zurückgeführt sind. Sie ist geometrisch als eine Strecke auf der Weltlinie dieses Punktes definiert; denn für die Komponenten dx, dy, dz, du einer solchen gilt wegen $u = ct$ die Proportion:

$$dx : dy : dz : du = q_x : q_y : q_z : c = Y_x : Y_y : Y_z : Y_u.$$

Sein absoluter Wert ist nach (49) oder (49a):

$$|Y| = i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51a)$$

Der Vektorcharakter von Y spricht das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit für die allgemeinste Lorentz-Transformation (XII) aus; die spezielle, auf (XI) bezügliche Form (25) findet man daraus durch Benutzung der Gleichungen (41).

Durchaus singulär ist ein Vektor Π, welcher von O aus nach einem Punkte x, y, z, l des Vor- oder Nachkegels hinweist. Für diesen ist nämlich nach (31b) der absolute Wert:

$$|\Pi| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + l^2} = 0.$$

Da Π^2 zugleich das skalare Produkt von Π mit sich selbst ist, so steht Π auf sich selbst senkrecht*). Ist ferner Ω der Vektor, der auf dem genannten Kegel (31b)

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = 0$$

in dem erwähnten Punkte senkrecht steht, so ist

$$\begin{aligned} \Omega_x : \Omega_y : \Omega_z : \Omega_l &= \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial l} = x : y : z : l \\ &= \Pi_x : \Pi_y : \Pi_z : \Pi_l. \end{aligned}$$

*) Derartige Strecken entsprechen den Minimalgeraden der dreidimensionalen Geometrie. Der Schnitt des Kegels (31b) mit dem unendlich Fernen stellt das absolute Gebilde unserer „vierdimensionalen Welt“ dar.

$\mathfrak{Q}$ und Π haben somit dieselbe Richtung, infolgedessen gibt das Verhältnis zweier entsprechender Komponenten das Verhältnis der absoluten Werte an, welche selbst beide Null sind.

b) Sechservektoren. Als Sechservektor bezeichnen wir den Inbegriff der sechs Komponenten

$$\mathfrak{F}_{xl}, \quad \mathfrak{F}_{yl}, \quad \mathfrak{F}_{zl},$$
$$\mathfrak{F}_{yz}, \quad \mathfrak{F}_{zx}, \quad \mathfrak{F}_{xy},$$

denen sechs weitere: $\mathfrak{F}_{lx}$, $\mathfrak{F}_{ly}$, $\mathfrak{F}_{lz}$, $\mathfrak{F}_{zy}$, $\mathfrak{F}_{xz}$, $\mathfrak{F}_{yx}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{F}_{jk} = -\mathfrak{F}_{kj} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

zugeordnet sind, wenn sie sich nach dem Schema:

	$\mathfrak{F}_{x'l'}$	$\mathfrak{F}_{y'l'}$	$\mathfrak{F}_{z'l'}$	$\mathfrak{F}_{y'z'}$	$\mathfrak{F}_{z'x'}$	$\mathfrak{F}_{x'y'}$
$\mathfrak{F}_{xl}$	A^{14}_{14}	A^{14}_{24}	A^{14}_{34}	A^{14}_{23}	A^{14}_{31}	A^{14}_{12}
$\mathfrak{F}_{yl}$	A^{24}_{14}	A^{24}_{24}	A^{24}_{34}	A^{24}_{23}	A^{24}_{31}	A^{24}_{12}
$\mathfrak{F}_{zl}$	A^{34}_{14}	A^{34}_{24}	A^{34}_{34}	A^{34}_{23}	A^{34}_{31}	A^{34}_{12}
$\mathfrak{F}_{yz}$	A^{23}_{14}	A^{23}_{24}	A^{23}_{34}	A^{23}_{23}	A^{23}_{31}	A^{23}_{12}
$\mathfrak{F}_{zx}$	A^{31}_{14}	A^{31}_{24}	A^{31}_{34}	A^{31}_{23}	A^{31}_{31}	A^{31}_{12}
$\mathfrak{F}_{xy}$	A^{12}_{14}	A^{12}_{24}	A^{12}_{34}	A^{12}_{23}	A^{12}_{31}	A^{12}_{12}

$\ldots$ (53)

transformieren. Daß die beiden hierin enthaltenen Gleichungssysteme miteinander identisch sind, folgt aus den auf S. 60 angegebenen Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten $A^{m'n'}_{mn}$. Außerdem sollen entweder die drei Komponenten, welche den Index l besitzen, rein imaginär und die drei anderen reell sein, oder umgekehrt. Diese Festsetzung bleibt bei einer Lorentz-Transformation wegen der Realitätsverhältnisse der Unterdeterminanten $A^{m'n'}_{mn}$ (S. 58) erhalten. Insofern die Unterdeterminanten in die Transformation eingehen, ist der Sechservektor das Gegenstück zum axialen Vektor in drei Dimensionen. Damit hängt zusammen, daß sich die Komponenten $\mathfrak{F}_{jk}$ nicht auf die Koordinatenachsen, sondern auf die Koordinatenebenen beziehen.

Dreht man z. B. wie in (34) das Achsenkreuz in der XL-Ebene, so bleibt diese selbst erhalten und dementsprechend wird nach (53) und (46) $\mathfrak{F}_{xl} = \mathfrak{F}_{x'l'}$. Aus formalen Gründen ist es manchmal zweckmäßig, Komponenten mit zwei gleichen Indices ($\mathfrak{F}_{xx}$ usw.) einzuführen; diese sollen stets identisch Null sein.

Zu jedem Sechservektor $\mathfrak{F}$ gehört der duale Vektor $\mathfrak{F}^*$, der ihm durch die Definition

$$\mathfrak{F}^*_{mn} = \mathfrak{F}_{op} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

zugeordnet ist. Die Indices $mnop$ müssen dabei alle voneinander verschieden und so gewählt sein, daß die Anordnung $mnop$ durch eine gerade Zahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge x, y, z, l hervorgeht, z. B. ist

$$\mathfrak{F}^*_{xl} = \mathfrak{F}_{yz} \quad \text{dagegen nach (52)} \quad \mathfrak{F}^*_{yl} = -\mathfrak{F}_{xz}$$

Wegen (42) gilt für $\mathfrak{F}^*$ dieselbe Transformation (53) wie für $\mathfrak{F}$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein zweiter Sechservektor, so sind Invarianten der Transformation nach (53) und S. 60 das skalare Produkt:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{F}\mathfrak{G}) = {} & \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{xl} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{G}_{yl} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{G}_{zl} \\ & + \mathfrak{F}_{yz}\mathfrak{G}_{yz} + \mathfrak{F}_{zx}\mathfrak{G}_{zx} + \mathfrak{F}_{xy}\mathfrak{G}_{xy}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (55)$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}) = (\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*) = {} & \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{yz} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{G}_{zx} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{G}_{xy} \\ & + \mathfrak{F}_{yz}\mathfrak{G}_{xl} + \mathfrak{F}_{zx}\mathfrak{G}_{yl} + \mathfrak{F}_{xy}\mathfrak{G}_{zl}\end{aligned}\right\} . \quad (55\,a)$$

Der einzelne Vektor $\mathfrak{F}$ hat infolgedessen zu Invarianten seinen absoluten Wert:

$$|\mathfrak{F}| = \sqrt{\mathfrak{F}^2_{xl} + \mathfrak{F}^2_{yl} + \mathfrak{F}^2_{zl} + \mathfrak{F}^2_{yz} + \mathfrak{F}^2_{zx} + \mathfrak{F}^2_{xy}} = |\mathfrak{F}^*| \quad (55\,b)$$

und das skalare Produkt:

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*) = 2\,(\mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{F}_{yz} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{F}_{zx} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{F}_{xy}) \quad \ldots \quad (55\,c)$$

Man könnte zunächst daran denken, eine dritte Vektorart einzuführen, in deren Transformationsformeln die dreireihigen Unterdeterminanten A^n_m als Koeffizienten eingehen. Wegen (40) würden diese aber wieder Vierervektoren.

§ 11. Die algebraischen Vektoroperationen.

a) Addition und Subtraktion. Vektoren gleicher Art werden addiert und subtrahiert, indem man diese Operationen an ihren Komponenten vornimmt. Bei Vierervektoren ist dies das-

selbe, wie wenn man die sie darstellenden Strecken geometrisch addiert bzw. subtrahiert. In einer Vektorsumme ist die Reihenfolge der Summanden gleichgültig (kommutatives Gesetz). Auch kann man sie beliebig in Teilsummen zusammenfassen und diese addieren (assoziatives Gesetz).

b) Die skalare Multiplikation ist schon im § 10 besprochen.

c) Vektorprodukte.

α) Aus zwei Vierervektoren. Ein Sechservektor ist das Vektorprodukt

$$\mathfrak{B} = [P\Phi] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

aus P und Φ, dessen Komponenten

$$\mathfrak{B}_{jk} = \begin{vmatrix} P_j & P_k \\ \Phi_j & \Phi_k \end{vmatrix} \qquad (j, k = x, y, z, l) \quad . \quad . \quad . \quad (56\,a)$$

sein sollen. Daß dem so ist, überzeugt man sich leicht, da z. B. nach (47):

$$\mathfrak{B}_{x'l'} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_4^{(1)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_x & P_l \\ \Phi_x & \Phi_l \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_4^{(2)} & \alpha_4^{(3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_y & P_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} + \cdots$$
$$= A_{14}^{14}\,\mathfrak{B}_{xl} + \cdots + A_{14}^{23}\,\mathfrak{B}_{yz} + \cdots$$

wird, was mit der Transformation (53) übereinstimmt. Dieser Sechservektor ist aber insofern ein spezieller, als das skalare Produkt ($\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*$), wie die Ausrechnung nach (55c) zeigt, identisch Null ist.

Das kommutative Gesetz gilt hier nicht. Vielmehr ist

$$[P\Phi] = -[\Phi P] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Wählt man die Ebene durch P und Φ als eine der Koordinatenebenen, so sieht man, daß $[P\Phi]$ das Parallelogramm aus P und Φ nach Flächeninhalt und Umlaufssinn darstellt — genau so, wie auch das Produkt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ aus zwei Raumvektoren. Wählt man in der zu der genannten Ebene senkrecht stehenden Ebene (es gibt deren stets eine und nur eine, z. B. zur xy-Ebene die zl-Ebene) zwei andere Vierervektoren Ψ und X, so stellt die Summe

$$\mathfrak{B} = [P\Phi] + [\Psi X] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57\,a)$$

einen Sechservektor dar, für den ($\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*$) von Null verschieden ist, dessen sechs Komponenten also keiner einschränkenden

Bedingung mehr unterworfen sind. Der allgemeine Sechservektor wird demnach durch zwei zueinander senkrechte Flächenstücke, jedes nach Inhalt und Umlaufssinn gewertet, dargestellt. Diese geometrische Darstellung hat Sommerfeld weiter ausgebaut.

β) Aus einem Vierervektor P und einem Sechservektor $\mathfrak{F}$ kann man ein Produkt $[P\mathfrak{F}]$ bilden, welches zum Typus der Vierervektoren gehört. Seine k-Komponente soll sein:

$$[P\mathfrak{F}]_k = P_x\mathfrak{F}_{kx} + P_y\mathfrak{F}_{ky} + P_z\mathfrak{F}_{kz} + P_l\mathfrak{F}_{kl} \,(k = x, y, z, l) \quad (58)$$

Seine x'-Komponente hat also den Wert:

$$[P\mathfrak{F}]_{x'} = P_{y'}\mathfrak{F}_{x'y'} + P_{z'}\mathfrak{F}_{x'z'} + P_{l'}\mathfrak{F}_{x'l'}$$

Wendet man nämlich rechts die Transformationen (47) und (53) an, so findet man als Faktor von $P_x\mathfrak{F}_{xl}$ z. B. die Summe:

$$\alpha_2^{(1)} A_{12}^{14} + \alpha_3^{(1)} A_{13}^{14} + \alpha_4^{(1)} A_{14}^{14} = -A_1^{(4)} = -\alpha_1^{(4)} \quad . \; . \quad (59)$$

als Faktor von $P_y\mathfrak{F}_{yl}$:

$$\alpha_2^{(2)} A_{12}^{24} + \alpha_3^{(2)} A_{13}^{24} + \alpha_4^{(2)} A_{14}^{24} = -A_1^{(4)} = -\alpha_1^{(4)}$$

usw., so daß

$$[P\mathfrak{F}]_{x'} = \alpha_1^{(1)}[P\mathfrak{F}]_x + \alpha_1^{(2)}[P\mathfrak{F}]_y + \alpha_1^{(3)}[P\mathfrak{F}]_z + \alpha_1^{(4)}[P\mathfrak{F}]_l$$

ist. Damit ist der Charakter als Vierervektor bewiesen.

Ebenso ist der umgekehrte Schluß zulässig: Sollen in (58) sowohl die Größen P_x, P_y, P_z, P_l als die vier Ausdrücke $[P\mathfrak{F}]_k$ die Komponenten von Vierervektoren sein, so müssen die $\mathfrak{F}_{jk}$ die Komponenten eines Sechservektors bilden; denn soll wie in (59) $\alpha_1^{(4)}$ linear durch $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_4^{(1)}$ ausgedrückt werden, so sind die Koeffizienten der letzteren notwendigerweise die Unterdeterminanten zweiter Ordnung von A. — Man bestätigt leicht, daß sich in dem skalaren Produkt der Vierervektoren P und $[P\mathfrak{F}]$ je zwei Summanden wegen (52) aufheben, so daß

$$(P[P\mathfrak{F}]) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

ist. Das Vektorprodukt $[P\mathfrak{F}]$ steht somit auf P senkrecht.

γ) Ein Vierervektor ist ferner das Vektorprodukt

$$P = [\Phi\, \Psi\, X] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

aus den drei Vierervektoren Φ, Ψ und X, dessen Komponenten

$$P_x = -i \begin{vmatrix} \Phi_y & \Phi_z & \Phi_l \\ \Psi_y & \Psi_z & \Psi_l \\ X_y & X_z & X_l \end{vmatrix} \text{ usw.} \quad P_l = -i \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \\ X_x & X_y & X_z \end{vmatrix} \quad . \quad (61\,a)$$

lauten sollen. Setzen wir nämlich nach (56) $[\Psi X] = \mathfrak{B}$ und schreiben wir (61 a) und (54) in die Form:

$$P_x = -i \left(\Phi_y \begin{vmatrix} \Psi_z & \Psi_l \\ X_z & X_l \end{vmatrix} + \Phi_z \begin{vmatrix} \Psi_l & \Psi_y \\ X_l & X_y \end{vmatrix} + \Phi_l \begin{vmatrix} \Psi_y & \Psi_z \\ X_y & X_z \end{vmatrix} \right)$$
$$= -i \, (\Phi_y \mathfrak{B}^*_{xy} + \Phi_z \mathfrak{B}^*_{xz} + \Phi_l \mathfrak{B}^*_{xl}) \text{ usw.}$$

so sieht man, daß

$$[\Phi \Psi X] = -i \, [\Phi \mathfrak{B}^*],$$

d. h. gleich dem Vektorprodukt aus dem Vierervektor $(-i\Phi)$ und dem Sechservektor $\mathfrak{B}^*$ ist. Darin liegt der Beweis der Vektoreigenschaft von $[\Phi \Psi X]$.

Das Vektorprodukt $[\Phi \Psi X]$ entspricht in mancher Hinsicht dem Vektorprodukt $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ aus zwei Raumvektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Deuten wir die letzteren als Strecken, so stellt $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ das aus ihnen gebildete Parallelogramm nach Größe, Lage und Umlaufssinn dar, insofern die Komponenten $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y$ usw. (vom Vorzeichen abgesehen) die Größe der Parallelogramme angeben, welche man durch Projektion des ersteren auf die Koordinatenebenen erhält. Ebenso ist z. B. (vgl. 50):

$$P_x = \begin{vmatrix} \Phi_y & \Phi_z & \Phi_u \\ \Psi_y & \Psi_z & \Psi_u \\ X_y & X_z & X_u \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,b)$$

gleich dem Inhalt des Parallelepipeds, welches aus den Projektionen der Vektoren Φ, Ψ, X auf den yzu-Raum gebildet ist, und welches daher die Projektion des aus den Strecken $\Phi \Psi X$ selbst gebildeten Parallelepipedes darstellt. Das letztere ist demnach durch Lage und Größe der geometrische Repräsentant des Vektorproduktes $[\Phi \Psi X]$. Das Vektorprodukt P steht auf den Vektoren, aus denen es gebildet ist, in dem obigen, nichteuklidischen Sinne senkrecht; denn berechnet man die skalaren Produkte $(P\Phi)$, $(P\Psi)$ und (PX), so wird man auf vierreihige Determinanten geführt, in denen zwei Zeilen übereinstimmen, so daß diese Produkte identisch Null sind. Nun gibt es aber noch zwei derartige

Richtungen, welche einander entgegengesetzt sind. Ebenso wie man dem Dreieck aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen Umlaufssinn geben muß, um $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ eindeutig zu definieren, so muß man hier zu dem analogen Zweck dem Parallelepiped einen Schraubensinn zuordnen. Wir setzen fest, daß P zu Φ, Ψ, X so liegen soll, wie die u-Achse zu den x-, y-, z-Achsen. Da wir im Raume stets Rechtssysteme als Achsenkreuze benutzen, bedeutet dies: Es sollen die Vektoren Φ, Ψ, X in dieser Reihenfolge eine Rechtsschraubung um P darstellen.

Da man einen beliebigen Raum mit beliebiger Annäherung in (hinreichend kleine) Parallelepipede zerlegen kann, so können wir jeden dreidimensionalen Raum mit Schraubensinn als einen Vierervektor auffassen.

Wie unter α erwähnt, ist $\mathfrak{B} = [\Psi X]$ nur ein spezieller Sechservektor. Da man aber nach (57a) den allgemeinen Vektor $\mathfrak{W}$ als Summe aus zwei derartigen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ darstellen kann, so ist das Vektorprodukt $-i[\Phi\mathfrak{W}^*] = -i[\Phi\mathfrak{B}^*] - i[\Phi\mathfrak{B}_1^*]$ aufzufassen als vektorielle Summe aus zwei Räumen mit Schraubensinn, d. h. ebenfalls als ein derartiges dreidimensionales Gebilde. Da man $-i\mathfrak{W}^* = \mathfrak{F}$ setzen kann, so ist hiermit eine geometrische Darstellung für das Vektorprodukt $[P\mathfrak{F}]$ gewonnen.

§ 12. Vektorielle Differentialoperationen.

a) Ist φ eine skalare Funktion von x, y, z, l, so geht sie durch die Substitutionen (XII) über in eine Funktion der Argumente

$$\alpha_1^{(1)}x' + \alpha_2^{(1)}y' + \alpha_3^{(1)}z' + \alpha_4^{(1)}l', \quad \alpha_1^{(2)}x' + \cdots,$$
$$\alpha_1^{(3)}x' + \cdots, \quad \alpha_1^{(4)}x' + \cdots$$

Infolgedessen ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \alpha_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_1^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_1^{(3)}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \alpha_1^{(4)}\frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

d. h. man kann im Schema (47) P_x durch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $P_{x'}$ durch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ usw. ersetzen.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

sind somit die Komponenten eines Vierervektors, den man als den Gradienten von φ ($\Gamma\varrho\alpha\delta\varphi$) bezeichnet. Er gibt wie der dreidimensionale Gradient Richtung und Größe des stärksten Anstieges der Funktion φ an.

b) Man kann das Ergebnis von a) dahin aussprechen, daß die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial l}$$

die Komponenten eines symbolischen Vierervektors ∇ bilden. Die Divergenz von P

$$\left.\begin{aligned} Div\ P &= \frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}+\frac{\partial P_l}{\partial l}\\ &= \frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}+\frac{\partial P_u}{\partial u}\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (62)$$

[vgl. (33) und (50)] ist dann dessen skalares Produkt mit dem Vierervektor P. Das bedeutet nur, daß der rechnerische Nachweis der Invarianz dieses Ausdruckes genau so verläuft wie bei dem Produkt $(P\Phi)$.

c) Bilden wir aus ∇ und einem Vektor P das Vektorprodukt, so finden wir einen Sechservektor, die Rotation von P ($\mathfrak{Rot}\,P$), deren Komponenten nach (56a)

$$\mathfrak{Rot}_{jk}P = \frac{\partial P_k}{\partial j}-\frac{\partial P_j}{\partial k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial k} \\ P_j & P_k \end{vmatrix} \quad j,k = x,y,z,l \qquad (63)$$

sind. Den dazu dualen Vektor bezeichnen wir als $\mathfrak{Rot}^*\,P$.

d) Dem Vektorprodukt aus dem Vierervektor Δ und dem Sechservektor $\mathfrak{F}$ entspricht die „Divergenz" von $\mathfrak{F}$, $\Delta iv\,\mathfrak{F}$, d. h. diese ist ein Vierervektor, dessen k-Komponente nach (58) lautet:

$$\Delta iv_k\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}_{kx}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{ky}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{kz}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{kl}}{\partial l} \quad k = x,y,z,l \qquad (64)$$

Wie aus der Vektoreigenschaft von $[P\mathfrak{F}]$ zwingend geschlossen werden kann, daß $\mathfrak{F}$ ein Sechservektor ist, so auch hier: Haben wir vier Ausdrücke von der Form (64), die sich als Komponenten eines Vierervektors transformieren, so müssen sich die

$\mathfrak{F}_{jk}$ nach dem Schema (53) umrechnen. — Man bestätigt durch Einsetzen der Definitionen (63) und (64) unmittelbar die Rechnungsregeln:

$$Div\,(\mathit{Aiv}\,\mathfrak{F}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

$$\mathit{Aiv}\,(\mathfrak{Rot}^{*}P) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

e) Der Laplacesche Operator in vier Dimensionen

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

(„Delta") entspricht durchaus dem Quadrat des symbolischen Vektors ∇. Er ist daher eine gegen die Lorentz-Transformation invariante Operation, d. h. $\Box\varphi$ ist ein Skalar, $\Box P$ ein Vierervektor. Dies zeigt sich auch an den Rechnungsregeln

$$Div\,(\Gamma\varrho\alpha\delta\,\varphi) = \Box\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

$$\mathit{Aiv}\,(\mathfrak{Rot}\,P) = \Gamma\varrho\alpha\delta\,(Div\,P) - \Box P \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

welche man ohne Schwierigkeiten rechnerisch nachprüfen kann.

f) Umrechnung von $\mathfrak{Rot}\,P$ auf hyperbolische Koordinaten *).

Wir deuten für den Augenblick x, l, y als reelle, rechtwinkelige Koordinaten in drei Dimensionen. Die x-, l-, y-Komponente des Vektors *rot* $\mathfrak{A}$ sind dann gleich

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial l} - \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_l}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial l}.$$

Führt man statt x und l nun die Polarkoordinate R, φ durch die Substitutionen

$$x = R\cos\varphi, \quad l = R\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

ein, so sind die Richtungen der wachsenden R und φ in einem beliebigen Punkt P identisch mit den Richtungen der x'- und l'-Achse eines Systems, welches gegen das ursprüngliche um den Winkel φ gedreht ist, so daß

$$\mathfrak{A}_R = \mathfrak{A}_x\cos\varphi + \mathfrak{A}_l\sin\varphi \quad \mathfrak{A}_\varphi = -\mathfrak{A}_x\sin\varphi + \mathfrak{A}_l\cos\varphi \quad (71)$$

sind. Daraus folgt dann bekanntlich, daß die Komponenten von *rot* $\mathfrak{A}$ nach R, φ, y die Werte haben:

---

*) Diese Umrechnung wird erst in § 18 gebraucht und kann vom Leser vorläufig übergangen werden.

$$\left.\begin{aligned} rot_R\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{R}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial y} \\ rot_\varphi\ \mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_R}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial R} \\ rot_y\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial (R\mathfrak{A}_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial \mathfrak{A}_R}{o\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (72)$$

Nun legen wir den Bezeichnungen x, l, y wieder die bisherige Bedeutung bei. Die Substitutionen (70) führen dann auf die „hyperbolischen" Koordinaten R, φ, so genannt, weil $R = const$ die Gleichung einer Hyperbel $x^2 - u^2 = const$ ist. Nur ist φ wie l rein imaginär, wenn wir R als reell voraussetzen, die Betrachtung also auf Punkte beschränken, für die $R^2 = x^2 - u^2 > 0$ ist. Dennoch sind auch hier die Richtungen der wachsenden R und φ in einem beliebigen Punkte P identisch mit den Richtungen der x'- und l'-Achse eines Systems K', das im Sinne von § 9 um den imaginären Winkel φ gegen das System K gedreht ist. Denn ziehen wir durch P die Hyperbel $x^2 - u^2 = R^2$, so gibt ihre Tangente die Richtung an, in der bei konstantem R der Winkel φ wie l' (imaginär) wächst, während $\overrightarrow{OP}$ offenbar die x'-Achse ist. Infolgedessen gelten nach (47), (41) und (35) für die Komponente eines Vierervektors P die zu (71) bzw. (34a) analogen Gleichungen:

$$P_R = P_x \cos\varphi + P_l \sin\varphi \qquad P_\varphi = -P_x \sin\varphi + P_l \cos\varphi \quad (73)$$

Nun sind nach (63) die ly-, yx-, xl-Komponenten von $\mathfrak{Rot}\, P$ unmittelbar die Komponenten von $rot\, \mathfrak{A}$ nach $x, l. y$, wenn man $\mathfrak{A}$ als die Projektion von P auf den xly-Raum auffaßt, also

$$P_x = \mathfrak{A}_x, \quad P_y = \mathfrak{A}_y, \quad P_l = \mathfrak{A}_l,$$

also auch

$$P_R = \mathfrak{A}_R, \quad P_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi$$

setzt. Die Anwendung der Gleichungen (72) lehrt dann, daß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Rot}_{\varphi y} P &= \frac{1}{R}\frac{\partial P_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial y} \\ \mathfrak{Rot}_{y R} P &= \frac{\partial P_R}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial R} \\ \mathfrak{Rot}_{R\varphi} P &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial (R P_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial P_R}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (74)$$

ist. Es versteht sich von selbst, daß zu den beiden ersteren die Analoga

$$\mathfrak{Rot}_{\varphi z} P = \frac{1}{R}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}, \quad \mathfrak{Rot}_{z R_l} P = \frac{\partial P_R}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial R}. \quad (75)$$

bestehen, während

$$\mathfrak{Rot}_{yz} P = \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots (75a)$$

bleibt.

§ 13. Welttensoren.

Als Welttensor bezeichnen wir den Inbegriff von 16 Komponenten

$$\left.\begin{array}{cccc} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & T_{xl} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & T_{yl} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & T_{zl} \\ T_{lx} & T_{ly} & T_{lz} & T_{ll} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (76)$$

mit den 6 Bedingungsgleichungen

$$T_{jk} = T_{kj} \quad \ldots\ldots\ldots (76a)$$

wenn sie mit den Komponenten eines beliebig gewählten Vierervektors P in der folgenden Art zusammengesetzt:

$$\left.\begin{array}{c} T_{kx}P_x + T_{ky}P_y + T_{kz}P_z + T_{kl}P_l = \Phi_k \\ (k = x, y, z, l) \end{array}\right\} \cdot \cdot (77)$$

wieder die Komponenten eines Vierervektors Φ ergeben. Es folgt aus dieser Definition, daß nach (47)

$$\begin{aligned} \Phi_{x'} &= T_{xx}P_x + T_{xy}P_{y'} + T_{xz}P_z + T_{xl}P_{l'} \\ &= \alpha_1^{(1)}\Phi_{x'} + \alpha_2^{(1)}\Phi_{y'} + \alpha_3^{(1)}\Phi_{z'} + \alpha_4^{(1)}\Phi_{l'} \end{aligned}$$

sein muß; wendet man nun auf $\Phi_{x'}$ usw. die Gleichung (77) an, und setzt man ebenfalls nach (47):

$$P_{x'} = \alpha_1^{(1)}P_x + \alpha_1^{(2)}P_y + \alpha_1^{(3)}P_z + \alpha_1^{(4)}P_l \text{ usw.},$$

so findet man die Gleichheit von zwei linearen Funktionen der vier unabhängigen Veränderlichen P_x, P_y, P_z, P_l; die Koeffizienten müssen in beiden übereinstimmen. Die Durchführung dieser einfachen Rechnung ergibt die Transformationsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
T_{xx} &= \alpha_1^{(1)2} T_{x'x'} + \alpha_2^{(1)2} T_{y'y'} + \alpha_3^{(1)2} T_{z'z'} + \alpha_4^{(1)2} T_{l'l'} \\
&\quad + 2\{\alpha_1^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{x'l'} + \alpha_2^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{y'l'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{x'l'} \\
&\qquad + \alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} T_{y'z'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)} T_{z'x'} + \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} T_{x'y'}\} \\
T_{xy} &= \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)} T_{x'x'} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} T_{y'y'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)} T_{z'z'} + \alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)} T_{l'l'} \\
&\quad + (\alpha_1^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_1^{(2)}) T_{x'l'} + (\alpha_2^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_2^{(2)}) T_{y'l'} \\
&\quad + (\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_3^{(2)}) T_{z'l'} + (\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_2^{(2)}) T_{y'z'} \\
&\quad + (\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(2)}) T_{z'x'} + (\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(2)}) T_{x'y'} \\
&\qquad \text{usw.}
\end{aligned}\right\} (78)$$

d. h. die Tensorkomponenten transformieren sich wie die Quadrate x^2 usw. und Produkte $xy \ldots yz \ldots$ aus den Weltkoordinaten. Daraus folgt unter anderem, daß die Summe der Diagonalkomponenten

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll}$$

eine Invariante der Lorentz-Transformation ist. Die Analogie zum symmetrischen Tensor $\boldsymbol{p}$ in drei Dimensionen ist vollkommen.

Da die Operationen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial l}$ nach § 12 einen symbolischen Vektor bilden, so kann man die Definition (77) durch die Forderung ersetzen, daß $\mathit{div}\, T$, d. h. der Inbegriff der vier Größen

$$\mathit{div}_k T = \frac{\partial T_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial T_{kz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial l} \quad (k = x, y, z, l) \quad . \quad (79)$$

einen Vierervektor darstellen soll. Hiervon machen wir Gebrauch, um zu zeigen, daß wir zu einem Tensor T gelangen, wenn wir die Komponenten von zwei Sechservektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in der folgenden Art zusammensetzen:

$$\left.\begin{aligned}
T_{jk} = \tfrac{1}{4}\{&(\mathfrak{F}_{jx}\mathfrak{G}_{kx} + \mathfrak{F}_{jy}\mathfrak{G}_{ky} + \mathfrak{F}_{jz}\mathfrak{G}_{kz} + \mathfrak{F}_{jl}\mathfrak{G}_{kl}) \\
&+ (\mathfrak{G}_{jx}\mathfrak{F}_{kx} + \mathfrak{G}_{jy}\mathfrak{F}_{ky} + \mathfrak{G}_{jz}\mathfrak{F}_{kz} + \mathfrak{G}_{jl}\mathfrak{F}_{kl}) \\
&- (\mathfrak{F}^*_{jx}\mathfrak{G}^*_{kx} + \mathfrak{F}^*_{jy}\mathfrak{G}^*_{ky} + \mathfrak{F}^*_{jz}\mathfrak{G}^*_{kz} + \mathfrak{F}^*_{jl}\mathfrak{G}^*_{kl}) \\
&- (\mathfrak{G}^*_{jx}\mathfrak{F}^*_{kx} + \mathfrak{G}^*_{jy}\mathfrak{F}^*_{jy} + \mathfrak{G}^*_{jz}\mathfrak{F}^*_{kz} + \mathfrak{G}^*_{jl}\mathfrak{F}^*_{kl})\} \\
&j, k = x, y, z, l.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (80)$$

Denn es ist dann:

$$
\begin{aligned}
&4\,\Delta iv_x T \\
&= 2\,\frac{\partial}{\partial x}\Big[\ \mathfrak{F}_{xy}\underline{\mathfrak{G}_{xy}} + \mathfrak{F}_{xz}\mathfrak{G}_{xz} + \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{xl} - \mathfrak{F}^*_{xy}\underline{\mathfrak{G}^*_{xy}} - \mathfrak{F}^*_{xz}\mathfrak{G}^*_{xz} - \mathfrak{F}^*_{xl}\mathfrak{G}^*_{xl}\Big] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\Big[\ + \mathfrak{F}_{xz}\mathfrak{G}_{yz} + \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{yl} - \mathfrak{F}^*_{xz}\mathfrak{G}^*_{yz} - \mathfrak{F}^*_{xl}\mathfrak{G}^*_{yl} \\
&\qquad\quad + \mathfrak{G}_{xz}\mathfrak{F}_{yz} + \mathfrak{G}_{xl}\mathfrak{F}_{yl} - \mathfrak{G}^*_{xz}\mathfrak{F}^*_{yz} - \mathfrak{G}^*_{xl}\mathfrak{F}^*_{yl}\Big] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\ \mathfrak{F}_{xy}\underline{\mathfrak{G}_{zy}} + \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{zl} - \mathfrak{F}^*_{xy}\underline{\mathfrak{G}^*_{zy}} - \mathfrak{F}^*_{xl}\mathfrak{G}^*_{yl} \\
&\qquad\quad + \mathfrak{G}_{xy}\mathfrak{F}_{zy} + \underline{\mathfrak{G}_{xl}}\mathfrak{F}_{zl} - \mathfrak{G}^*_{xy}\mathfrak{F}^*_{zy} - \underline{\mathfrak{G}^*_{xl}}\mathfrak{F}^*_{zl}\Big] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial l}\Big[\ \mathfrak{F}_{xy}\underline{\mathfrak{G}_{ly}} + \mathfrak{F}_{xz}\mathfrak{G}_{lz} - \mathfrak{F}^*_{xy}\underline{\mathfrak{G}^*_{ly}} - \mathfrak{F}^*_{xz}\mathfrak{G}^*_{lz} \\
&\qquad\quad + \mathfrak{G}_{xy}\mathfrak{F}_{ly} + \underline{\mathfrak{G}_{xz}}\mathfrak{F}_{lz} - \mathfrak{G}^*_{xy}\mathfrak{F}^*_{ly} - \underline{\mathfrak{G}^*_{xz}}\mathfrak{F}^*_{lz}\Big]
\end{aligned}
$$

Führt man hier nämlich die Differentiation an den einmal unterstrichenen Größen aus, so findet man bei ihrer Addition nach (64):

$$+ 2\,\mathfrak{F}_{xy}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{G}_{ly}}{\partial l}\right) = -2\,\Delta iv_y \mathfrak{G}\,.\,\mathfrak{F}_{xy},$$

die zweimal unterstrichenen geben analog

$$- 2\,\mathfrak{F}^*_{xy}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*_{ly}}{\partial l}\right) = +2\,\Delta iv_y \mathfrak{G}^*\,.\,\mathfrak{F}^*_{xy}.$$

Damit ist aber gerade ein Sechstel aller auftretenden Summanden verbraucht; die anderen lassen sich entsprechend zusammenfassen. Bezeichnet man den durch (80) definierten Tensor T als das Tensorprodukt $\big[[\mathfrak{F}\mathfrak{G}]\big]$, so gilt nach (58) die Rechnungsregel:

$$
\left.
\begin{aligned}
-\Delta iv\,\big[[\mathfrak{F}\mathfrak{G}]\big] = \tfrac{1}{2}\{&[\Delta iv\mathfrak{F}, \mathfrak{G}] + [\Delta iv\mathfrak{G}, \mathfrak{F}] \\
&- [\Delta iv\mathfrak{F}^*, \mathfrak{G}^*] - [\Delta iv\mathfrak{G}^*, \mathfrak{F}^*]\}
\end{aligned}
\right\} \quad \cdot\ \cdot\ (81)
$$

Da aber die Klammerausdrücke rechts Vektorprodukte aus je einem Vierervektor und einem Sechservektor, d. h. selbst Vierervektoren sind, so ist, wie zu beweisen war, $T = \big[[\mathfrak{F}\mathfrak{G}]\big]$ ein Tensor; allerdings ein spezieller, denn es ist die Invariante

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll} = 0,$$

weil sich in ihr von den 48 Summanden je zwei paarweise aufheben.

Die in diesem Abschnitt begründete vierdimensionale Vektor- und Tensoranalysis läßt sich noch sehr viel weiter ausbauen. Es lassen sich z. B. die Integralsätze von Gauß und Stokes übertragen und der vermehrten Zahl der Dimension entsprechend neue auf Vektoren bezügliche Integralsätze aufstellen (vgl. die im Anhang zitierten Arbeiten von Sommerfeld). In diesem Heft können wir jedoch auf alle weiteren Hilfsmittel verzichten.

V. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip.

§ 14. Die Transformation des elektromagnetischen Feldes im leeren Raume.

Wir haben im Abschnitt III die Lorentz-Transformation aus der Forderung der Unveränderlichkeit der Wellengleichung (16) abgeleitet. Das Relativitätsprinzip behauptet, daß alle Naturgesetze ihre Form dabei behalten. Wir machen eine erste Probe, darauf, indem wir untersuchen, ob die Grundgleichungen (Ia) bis (IVa) der Elektronentheorie bei passender Transformation der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in allen Systemen die gleiche Gestalt haben. Der Nachweis ihrer Invarianz ist erbracht, wenn es gelingt, sie in eine vierdimensional-vektorielle Form zu kleiden. Dies ist trotz des Zusammenhanges zwischen der Wellengleichung (16) und den Gleichungen (Ia) usw. keineswegs nur eine Scheinprobe, da zwar die Wellengleichung aus ihnen, nicht aber umgekehrt diese aus jener abzuleiten sind.

Den Ausgangspunkt bildet die Transformation der Ladung e eines Elektrons oder eines Teiles von ihm. Beschleunigen wir ein solches vom Ruhezustand im berechtigten System K auf die Geschwindigkeit q, so gerät es dabei in den Ruhezustand, bezogen auf ein anderes berechtigtes System K'. Wegen der Gleichwertigkeit beider muß dann die Ladung e' bezogen auf K' denselben Wert haben, welchen sie vor der Beschleunigung im System K hatte. Nach § 5 [Gleichung (18)] ist aber e bezogen auf K unverändert geblieben. Daher gilt stets:

$$e = e' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Die Elektrizitätsmenge bleibt bei der Lorentz-Transformation unverändert. (Dasselbe gilt natürlich für jedes Bestimmungsstück für den Zustand eines Körpers, welches bezogen auf ein und dasselbe berechtigte System durch die Geschwindigkeit nicht verändert wird.)

Die Dichte ϱ ist der Quotient aus der Ladung und ihrem Volumen; infolgedessen transformiert sie sich wie der reziproke Wert des Volumens, oder da nach (24) $\frac{V}{\sqrt{c^2 - q^2}}$ invariant ist, wie $\sqrt{(c^2 - q^2)}^{-1/2}$. Ersetzt man daher in der Vierergeschwindigkeit Y [vgl. (51)] den Nenner $\sqrt{c^2 - q^2}$ durch den Faktor ϱ/c im Zähler, so muß man wiederum zu einem Vierervektor gelangen; dieser, der „Viererstrom“ P, hat die Komponenten

$$P_x = \frac{\varrho\, q_x}{c}, \quad P_y = \frac{\varrho\, q_y}{c}, \quad P_z = \frac{\varrho\, q_z}{c}, \quad P_l = i\varrho \quad . \quad (83)$$

Für den Fall der speziellen Transformation (XI) ergibt sich daraus nach (47) und (41), daß

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, q_x = \varrho' \frac{q'_x + v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \varrho\, q_y = \varrho' q'_y, \quad \varrho\, q_z = \varrho' q'_z \\ \varrho = \varrho' \frac{1 + \frac{v\, q'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot (83\,a)$$

ist. Der Viererstrom fällt in der Richtung mit der Weltlinie der Ladung zusammen, ist also zeitartig. Die Kontinuitätsgleichung (17) sagt aus:

$$Div\, P = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Die Grundgleichungen (IIa) und (IIIa) kann man folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} +\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, q_x \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, q_y \\ +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, q_z \\ +\frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial z} &= i\varrho \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot (84\,a)$$

Die linken Seiten haben die Gestalt der Komponenten der Divergenz eines Sechservektors (64), die rechten bilden die Komponenten eines Vierervektors. Sollen die Gleichungen (84a) gegen die Lorentz-Transformation invariant sein, so müssen nach § 12, d) notwendigerweise die sechs Größen:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{M}_{xl} = -i\mathfrak{E}_x, & \mathfrak{M}_{yl} = -i\mathfrak{E}_y, & \mathfrak{M}_{zl} = -\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{M}_{ys} = \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{H}_y & \mathfrak{M}_{xy} = i\mathfrak{H}_z \end{array}\right\} \quad (85)$$

die Komponenten eines Sechservektors, des „Feldvektors“ $\mathfrak{M}$, bilden; dessen absoluter Wert [(55b)]:

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85a)$$

und das skalare Produkt [(55c)]:

$$(\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}^*) = -2i(\mathfrak{E}\mathfrak{H}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85b)$$

sind Invarianten. Die Gleichungen (84a) nehmen dann die Form

$$\mathit{div}\,\mathfrak{M} = P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{XIII})$$

an. Durch (85) ist nach (53) die Transformation für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ festgelegt. Sollen die Gleichungen (Ia) bis (IVa) gegen die Lorentz-Transformation invariant sein, so müssen auch die bisher nicht benutzten Formeln (Ia) und (IVa) durch die Einführung an $\mathfrak{M}$ nach (85) eine vierdimensional-vektorielle Gestalt annehmen. In der Tat lassen sie sich zusammenfassen in:

$$\mathit{div}\,\mathfrak{M}^* = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{XIV})$$

Damit ist der Beweis der Invarianz der Feldgleichungen (Ia) bis (IVa) gegen die Lorentz-Transformation geliefert.

Die aus (85) und (53) folgenden Transformationsformeln für die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wollen wir für den speziellen Fall der Transformation (XI), daß nämlich die x'- und x-Achse beide der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Systems K' gegen K parallel sind, hinschreiben; die Unterdeterminanten $A_{m\,n}^{m'\,n'}$ haben dann die in (46) angegebenen Werte, also*):

*) Bei der Transformation (XI) fallen die Richtungen von x' und x, y' und y, z' und z zusammen, so daß man statt $\mathfrak{E}_{x'}$, $\mathfrak{E}'_x$ usw. schreiben kann. Im allgemeinen ist dagegen zwischen den Indices x' und x zu unterscheiden.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x & \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\mathfrak{E}'_y + \beta \mathfrak{H}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_y &= \frac{\mathfrak{H}'_y - \beta \mathfrak{E}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\mathfrak{E}'_z - \beta \mathfrak{H}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_z &= \frac{\mathfrak{H}'_z + \beta \mathfrak{E}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (85\,c)$$

Die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil hat danach nur relative Bedeutung; für jedes berechtigte System ist sie anders vorzunehmen. Z. B. sind Felder, welche von einem System aus betrachtet rein elektrisch oder rein magnetisch sind, für alle anderen Systeme gemischter Natur. Der physikalische Grund dafür ist, daß man bei Untersuchung eines elektromagnetischen Feldes mit elektrisch geladenen Probekörpern und Magnetnadeln deren Bewegungszustand mit in Betracht ziehen muß; der letztere aber wird von verschiedenen Systemen aus natürlich verschieden beurteilt.

§ 15. Die Transformation der Kraftdichte, Energie- und Impulssatz.

a) Die Viererkraft. Die Dichte der ponderomotorischen Kraft ist nach (IXa):

$$\mathfrak{F} = \varrho\,(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{IX}\,\mathfrak{a})$$

Auch diese Gleichung soll in jedem berechtigten Bezugssystem gelten. Die Transformation der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, sowie die der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ kennen wir. Wir können also hieraus die Transformationsformeln für $\mathfrak{F}$ ableiten. Von dem Vektorprodukt $[P\mathfrak{M}]$ lautet nach (58), (83) und (85) die x-Komponente:

$$\begin{aligned} [P\mathfrak{M}]_x &= P_y \mathfrak{M}_{xy} + P_z \mathfrak{M}_{xz} + P_l \mathfrak{M}_{xl} \\ &= \varrho\,(\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}[q_y \mathfrak{H}_z - q_z \mathfrak{H}_y]), \end{aligned}$$

es sind daher die räumlichen Komponenten:

$$[P\mathfrak{M}]_x = \mathfrak{F}_x, \quad [P\mathfrak{M}]_y = \mathfrak{F}_y, \quad [P\mathfrak{M}]_z = \mathfrak{F}_z \quad . \quad . \quad (86)$$

dagegen ist die vierte, zeitliche Komponente nach Rechnungsregel γ:

$$[P\mathfrak{M}]_l = P_x\mathfrak{M}_{lx} + P_y\mathfrak{M}_{ly} + P_z\mathfrak{M}_{lz} = \frac{i}{\varrho}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = \frac{i}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) \quad (86a)$$

Die „Viererkraft“ *)

$$F = [P\mathfrak{M}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86b)$$

stellt also in ihren drei räumlichen Komponenten die Kraftdichte $\mathfrak{F}$, in ihrer u-Komponente dagegen die Leistung der Kraftdichte dividiert durch c dar; dies gilt in allen Systemen. Die Vektoreigenschaft von F regelt somit das Verhalten der Kraftdichte $\mathfrak{F}$ bei einer Lorentz-Transformation. Aus der Rechnungsregel (60) folgt:

$$(PF) = (P[P\mathfrak{M}]) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86c)$$

Die Viererkraft steht also auf dem Viererstrom und damit auf der Weltlinie der Ladung senkrecht, sie ist daher ein raumartiger Vektor [vgl. § 10a)].

Aus der Vektoreigenschaft von F folgt für die spezielle Transformation (XI) nach (47) und (41):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{\mathfrak{F}'_x + \frac{v}{c^2}(\mathfrak{q}'\mathfrak{F}')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}'_y, \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}'_z \\ (\mathfrak{q}\mathfrak{F}) &= \frac{(\mathfrak{q}'\mathfrak{F}') + v\mathfrak{F}'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(\mathfrak{q}' + \mathfrak{v}, \mathfrak{F})}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (87)$$

Für die Gesamtkraft

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F} dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

welche auf ein System gegeneinander ruhender Ladungen ausgeübt wird **), gehen daraus nach (25d) wegen

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{c^2 + v\,\mathfrak{q}'_x}{c\sqrt{c^2 - v^2}}$$

die Formeln hervor:

---

*) F soll das griechische Digamma sein.

**) Wenn $\mathfrak{q}'$ bei der Integration nicht als konstant zu betrachten ist, so gelten die Gleichungen (87a) und (87b) offenbar nicht.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\mathfrak{K}'_x + \frac{v}{c^2}(\mathfrak{q}'\mathfrak{K}')}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}'_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} \\ \mathfrak{K}_z &= \mathfrak{K}'_{z'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (87\,a)$$

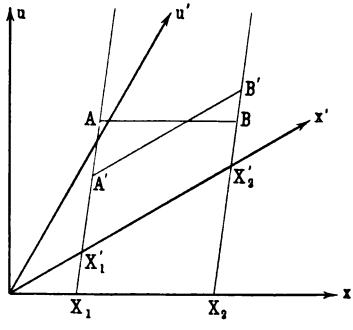
und für ihre Leistung:

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}) = \frac{(\mathfrak{q}'\,\mathfrak{K}') + v\,\mathfrak{K}'_x}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} = \frac{(\mathfrak{q}' + \mathfrak{v}, \mathfrak{K})}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')}{c^2}} \cdot \cdot \cdot \quad (87\,b)$$

Die Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ hat nach (88) nicht die Eigenschaft, sich zu einem vierdimensionalen Vektor ergänzen zu lassen, weil dV keine Invariante der Transformation ist.

Bei der Anwendung der Formeln (87 a und b) ist aber die folgende Einschränkung zu beachten: Die Integration in (88) ist für denselben Zeitpunkt t zu vollziehen. Stellen in Fig. 8 die parallelen Geraden $X_1 X'_1$ und $X_2 X'_2$ die Weltlinien der Endpunkte eines Stabes dar, so findet man die Kraft $\mathfrak{K}$ im System K durch Integration längs einer zu $X_1 X_2$ parallelen Geraden von ihrem Schnitt mit $X_1 X'_1$ bis zu dem mit $X_2 X'_2$ (z. B. AB), dagegen bezieht sich $\mathfrak{K}'$ im System K' auf eine Parallele zu $X'_1 X'_2$ (z. B. $A'B'$). Im allgemeinen, wenn die Viererkraft F eine beliebige Funktion der Weltpunkte ist, besteht demnach überhaupt keine Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Nur im stationären Falle, wenn sich der Zustand in einem materiellen Punkte nicht ändert, d. h. wenn F auf den (zu $X_1 X'_1$ parallelen) Weltlinien der letzteren konstant bleibt, gelten die Transformationen (87 a und b) streng; angenähert auch dann, wenn man über zwei sich schneidende Querschnitte (wie AB

Fig. 8.



und $A'B'$) integriert, und F sich auf Strecken von der Größenordnung von AA' und BB' nur unmerklich ändert.

b) Der Welttensor T. Wir erwähnten in § 5, daß der Kraftansatz (IX a) von dem Ausdruck der Energiedichte (VIII a) des Energieprinzips wegen nicht unabhängig ist. Wir wollen jetzt zeigen, daß dies Prinzip erfüllt ist, und fassen zu diesem Zweck den Welttensor

$$T = \left[[\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}]\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XV)}$$

(vgl. § 13) ins Auge. Daß die Viererkraft mit ihm durch die Gleichung

$$\mathfrak{F} = -\mathit{Div}\,T \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVI)}$$

verbunden ist, geht nach der Rechnungsregel (81) aus den Feldgleichungen (XIII) und (XIV) unter Berücksichtigung von (86 b) hervor, da aus ihnen

$$-\mathit{Div}\,T = [P\,\mathfrak{M}]$$

folgt.

Wir stellen zunächst die Werte der Komponenten von T, wie sie sich aus (80), (85) und (54) ergeben, zusammen. Unter Berücksichtigung von (14 a) und (X) finden wir z. B.:

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{H}_x^2 = p_{xx} \\
T_{xy} &= -(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y) \qquad = p_{xy} \\
T_{ll} &= -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \qquad = -W \\
T_{xl} &= i(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y) \qquad = \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x
\end{aligned}$$

oder schematisch geschrieben:

$$T = \left\{\begin{array}{cccc}
p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x \\
p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_y \\
p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_z \\
\frac{i}{c}\mathfrak{S}_x & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_y & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_z & -W
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(89)}$$

c) Der Energiesatz. Zur Diskussion beginnen wir mit der l-Komponente der Gleichung (XVI). Führen wir statt l nach

(33) die Zeit t und statt F_l die Leistung $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ nach (86a) ein, so finden wir:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + div\,\mathfrak{S} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Die beiden ersten Summanden geben die Zunahme der gesamten Energiedichte pro Zeiteinheit an, da die Arbeit $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ in andere Energiearten umgesetzt wird. Das Energieprinzip ist also erfüllt, wenn man die Bedeutung des Pointingschen Vektors als Dichte der Energieströmung beibehält. Der Energieansatz (VIIIa) gilt in allen berechtigten Systemen.

d) Die Erhaltung des Impulses. Doch enthält Gleichung (XVI) mehr; ihre drei räumlichen Komponenten kann man nach (89) in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

zusammenfassen. Die Gesamtkraft, welche auf die in einem abgegrenzten Raum vorhandenen Ladungen von den außerhalb befindlichen ausgeübt wird, ist daher

$$\mathfrak{K} = -\int \mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}\,dS - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}\,dS \quad \ldots \quad (91a)$$

Wir zerlegen sie in zwei Anteile:

$$\mathfrak{K}_1 = -\int \mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}\,dS, \quad \mathfrak{K}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}\,dS \quad \ldots \quad (92)$$

Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{K}^a$ die Kraft, welche umgekehrt die Ladungen des Integrationsgebietes auf alle anderen ausüben und nehmen wir an ihr die entsprechende Zerlegung in $\mathfrak{K}_1^a$ und $\mathfrak{K}_2^a$ vor, so folgt, daß

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_1^a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

ist. Nach Rechnungsregel ξ findet man nämlich:

$$\mathfrak{K}_1 = \int \mathfrak{p}_n\,d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92a)$$

und die entsprechende Komponente von $\mathfrak{K}^a$ erhält man offenbar, wenn man die Richtung der Normale n, d. h. nach ν' das Vorzeichen von $\mathfrak{p}_n$, umkehrt. $\mathfrak{K}_1$ gehorcht also dem dritten Newtonschen Axiom, der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Die Kraft $\mathfrak{K}$ möge durch die Elektronen auf ponderable Körper übertragen werden, deren mechanischer Impuls $\mathfrak{G}$ ist. (Wir wollen annehmen, daß diese Körper nicht über den abgegrenzten Bereich hinausragen.) Wir behalten nun in der Relativitätstheorie wie das Energieprinzip so auch den Impulssatz: Die Kraft ist gleich der Zunahme des Impulses des Körpers, auf den sie wirkt, d. h.

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

[vgl. (9)], als ein gesichertes Ergebnis der empirischen Forschung bei. Wie sich $\mathfrak{G}$ berechnet, ist freilich noch eine offene Frage (Abschnitt VII). Jedenfalls folgt, daß in allen Fällen, in denen nur $\mathfrak{K}_1$ in Frage kommt, z. B. bei allen stationären Vorgängen, die Summe aus $\mathfrak{G}$ und dem Impuls $\mathfrak{G}^a$ der außerhalb des Integrationsbereiches liegenden Körper

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}^a = const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93\,a)$$

ist, d. h. der gesamte Impuls bleibt konstant.

Ganz anders verhält es sich mit der Kraft $\mathfrak{K}_2$. Sie läßt sich nicht durch ein Oberflächenintegral ausdrücken, verletzt deshalb im allgemeinen das genannte Newtonsche Axiom und den Satz von der Erhaltung des mechanischen Impulses [1]). Das erstere ist in der Tat in der Elektrodynamik nicht aufrecht zu erhalten (vgl. § 4). Den Impulssatz dagegen kann man retten, wenn man dem Felde einen „elektromagnetischen Impuls“ $\mathfrak{G}_e$ mit der Dichte

$$\mathfrak{g}_e = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} = \frac{1}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

zuschreibt. Denn ersetzt man in Gleichung (91 a) $\mathfrak{K}$ durch $\frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ und $\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}\,dS$ durch $\frac{d\mathfrak{G}_e}{dt}$, so findet man nach (92):

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e)$$

oder nach (93):

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e + \mathfrak{G}^a + \mathfrak{G}_e^a = const \quad \ldots\ldots \quad (93\,b)$$

d. h. die Summe aus mechanischem und elektromagnetischem Impuls ist konstant (Abraham [2]). Die Kraft $\mathfrak{K}_1$ hat

nach dieser Auffassung nicht nur die mechanische Trägheit zu überwinden, welche sich der Vergrößerung des mechanischen Impulses $\mathfrak{G}$ widersetzt, sondern auch die elektromagnetische, welche der Veränderung des elektromagnetischen Impulses $\mathfrak{G}_e$ entgegenwirkt. Die ponderomotorische Wirkung ist die Summe von $\mathfrak{K}_1$ und der „elektromagnetischen Trägheitskraft“ $-\frac{d\mathfrak{G}_e}{dt}$*).

Gleichung (91) nimmt nach (95) die Gestalt an:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \dot{\mathfrak{g}}_e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95\,a)$$

Zwischen der Kraftdichte $\mathfrak{F}$ und der mechanischen Impulsdichte $\mathfrak{g}$ besteht aber die Beziehung:

$$\mathfrak{F} = \underline{\dot{\mathfrak{g}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94\,a)$$

(vgl. den Anhang, Absatz c), die mit (94) identisch ist. Somit ist

$$\underline{\dot{\mathfrak{g}}} + \dot{\mathfrak{g}}_e = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95\,b)$$

e) Die Erhaltung des Drehimpulses. In der klassischen Mechanik hat der Impulssatz sein Analogon in dem „Flächensatz“, der die Konstanz des Drehimpulses $\mathfrak{L}$ ausspricht. Nennen wir $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von einem beliebigen festen Anfangspunkte nach dem Orte des materiellen Volumelementes dV, und bezeichnen wir die Massendichte mit δ, so ist dort

$$\mathfrak{L} = \int \delta\,[\mathfrak{r}\mathfrak{q}]\,dV = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\,dV \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

da die Impulsdichte $\mathfrak{g} = \delta\,\mathfrak{q}$ ist. Das Drehmoment

$$\mathfrak{N} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\,dV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

welches auf die Körper des Integrationsbereiches ausgeübt wird, steht mit $\mathfrak{L}$ in dem zu (94) analogen Zusammenhang

$$\mathfrak{N} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\,dV = \int [\mathfrak{r}\underline{\dot{\mathfrak{g}}}]\,dV \quad \ldots \quad (98)$$

---

*) Im leeren Raum ist die Gesamtwirkung, wie aus (IXa) hervorgeht, wegen $\varrho = 0$ stets gleich Null. Die Maxwell-Hertzsche Theorie kannte nach (IX) nur die Kraft $\mathfrak{K}_1$, behielt also eine ponderomotorische Kraft vom Werte $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ auf die Volumeinheit des Vakuums übrig (vgl. § 4).

Übrigens sind diese beiden Erhaltungssätze insofern nicht gleichwertig, als man den zweiten aus dem ersteren ableiten kann. Nach (94 a) ist nämlich (98) eine Folgerung aus (97).

Wir wollen hier die Definition (97) für das Drehmoment $\mathfrak{M}$ übernehmen und finden dann nach (91) und (95)*):

$$\mathfrak{M} = -\int [\mathfrak{r}, \operatorname{div} \boldsymbol{p}]\, dS - \frac{d}{dt}\int [\mathfrak{r}\, \mathfrak{g}_e]\, dS \quad \ldots \quad (99)$$

Das erstere Integral ist nach ξ'

$$\mathfrak{M}_1 = -\int [\mathfrak{r}, \operatorname{div} \boldsymbol{p}]\, dS = \int [\mathfrak{r}\, \mathfrak{p}_n]\, d\sigma \quad \ldots \quad (100)$$

es ist das Drehmoment der zu $\mathfrak{K}_1$ (92) zusammengefaßten Flächenkräfte. Wie $\mathfrak{K}_1$ wechselt $\mathfrak{M}_1$ nur sein Vorzeichen, wenn wir nach der Gegenwirkung auf die außerhalb des Integrationsbereiches liegenden Körper fragen. Soweit der zweite Summand in (99) fortfällt, gilt also nach (98) analog zu (93 a) der „Flächensatz“

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a = \mathit{Const.}$$

Im allgemeinen aber muß diese Gleichung durch Einführung des „elektromagnetischen Drehimpulses“

$$\mathfrak{L}_e = \int [\mathfrak{r}\, \mathfrak{g}_e]\, dS \quad \ldots \quad (101)$$

ergänzt werden. Da nach (99) und (101)

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{d}{dt}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_e)$$

ist, gilt nun, daß die Summe aus beiden Drehimpulsen

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_e + \mathfrak{L}^a + \mathfrak{L}_e^a = \mathit{Const}$$

ist.

f) Transformation der Energie, des Energiestromes und der Spannungen. Die Gleichungen für die Transformation des Tensors $\boldsymbol{p}$, des Poyntingschen Vektors und der Energiedichte ergeben sich nach (89) aus den in § 13 angeführten Regeln für die Transformation des Welttensors T. Im Falle der speziellen Transformation (XI) gelten folgende Formeln:

---

*) Die Bezeichnungen dS und dV können in (97) und (99) miteinander vertauscht werden. (Vgl. den Anhang, S. 189.)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{S}_x &= \frac{(1+\beta^2)\,\mathfrak{S}'_x + v\,(p'_{xx} + W')}{1-\beta^2} \\
\mathfrak{S}_y &= \frac{\mathfrak{S}'_y + v\,p'_{xy}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathfrak{S}_z = \frac{\mathfrak{S}'_z + v\,p'_{xz}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
W &= \frac{W' + \beta^2 p'_{xx} + 2\frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_x}{1-\beta^2} \\
p_{yz} &= p'_{yz} \qquad p_{yy} = p'_{yy} \qquad p_{zz} = p'_{zz} \\
p_{xx} &= \frac{p'_{xx} + 2\frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_x + \beta^2 W'}{1-\beta^2} \\
p_{xy} &= \frac{p'_{xy} + \frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad p_{xz} = \frac{p'_{xz} + \frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots (102)$$

Man bestätigt sie am einfachsten, indem man nach (34) die Quadrate x^2 usw. und Produkte xy usw. der Weltkoordinaten transformiert, und dann jedes Produkt oder Quadrat jk ($j.k = x, y, z, l$) durch T_{jk} ersetzt*).

Blicken wir auf die Entwickelungen dieser beiden Paragraphen zurück, so können wir sagen: Schon die ursprüngliche Elektronentheorie hatte sich trotz ihrer Ätherhypothese in ihren elektromagnetischen Grundgleichungen eine dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gehorchende Grundlage geschaffen; darauf beruht ihr bleibendes Verdienst um die Elektrodynamik der bewegten

---

*) Die formale Abhängigkeit von der speziellen Wahl der Achsenkreuze in K und K' fällt fort, wenn wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
W &= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\left(W' + (\mathfrak{v}\mathfrak{g}')\right) + \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{v}, \mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\right)\right\} \\
\mathfrak{S} &= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\left(\mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\right) + \mathfrak{v}\left(W' + (\mathfrak{v}\mathfrak{g}')\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}\left[\mathfrak{v}, \left[\mathfrak{v}, \mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\right]\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots (102a)$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen bestätigt man, indem man die Achsen wie oben wählt und für das Vektorprodukt $[\mathfrak{v}\mathfrak{p}']$ den aus λ' folgenden Wert einsetzt.

Körper. Nur muß man, um dies voll hervortreten zu lassen, noch die Einsteinsche Kinematik und, wie wir später sehen werden, die dazu gehörige Mechanik hinzunehmen*). So ist die Auffassung berechtigt, daß der Michelsonsche Versuch gar nicht eine elektromagnetisch-optische Frage entscheidet, sondern eine rein kinematische, nämlich, ob die Dimensionen eines Körpers durch die Bewegung verändert werden. Eine analoge Auffassung läßt sich auch bei dem Trouton-Noblesschen Versuch durchführen (§ 17 f).

Zu der Streitfrage: Beruht die gegenseitige elektrodynamische Beeinflussung der Körper durch den leeren Raum auf Fernwirkung oder auf Übertragung durch einen „Äther"? aber ist zu sagen: Die zweite Alternative widerspricht dem Relativitätsprinzip (vgl. § 1); dennoch können wir auch der ersteren nicht zustimmen, zwischen den Körpern besteht vielmehr etwas physikalisch Wirkliches, das elektromagnetische Feld, welches trotz seiner Loslösung von aller Materie Energie, Bewegungsgröße und Spannungskräfte**) enthält und ihre Übertragung von einem Körper zum anderen vermittelt. Jene viel umstrittene Frage umfaßt also gar nicht zwei konträre Gegensätze, sie übersieht vielmehr die dritte, tatsächlich zutreffende Möglichkeit.

Zugleich zeigt sich der Wert des von Minkowski geschaffenen mathematischen Rüstzeuges im hellen Lichte. Enthalten doch die vier Gleichungen (XIII) bis (XVI)

$$\Delta iv\,\mathfrak{M} = P,\quad \Delta iv\,\mathfrak{M}^* = 0,\quad F = -\Delta iv\,T,\quad T = \left[[\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}]\right]$$

die ganze atomistische Elektrodynamik einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

---

*) Darin, daß die neue Kinematik und Mechanik von der älteren nur in Größen zweiter Ordnung abweicht, liegt der Grund, daß die Elektronentheorie alle Versuche über Einflüsse erster Ordnung erklären konnte.

**) Die Elektronentheorie betrachtete die Maxwellschen Spannungen als eine nur mathematisch zweckmäßige Fiktion. Die Relativitätstheorie hat nach (102) allen Grund, ihnen dieselbe Realität zuzuschreiben, wie der elektromagnetischen Energie und Bewegungsgröße [Planck[3])].

§ 16. Anwendungen.

a) Aberration und Dopplersches Prinzip. Setzt man in den Gleichungen (15) und (15a) $\varepsilon = \mu = 1$, so findet man die folgende Darstellung einer ebenen Welle von der Schwingungszahl ν' im leeren Raume, bezogen auf ein berechtigtes System K':

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E}'_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'_0 \sin\Theta \\ \Theta &= 2\pi\nu'\left\{t' - \frac{1}{c}\left(x'\cos\vartheta' + \sin\vartheta'(y'\cos\varphi' + z'\sin\varphi')\right)\right\} \\ \mathfrak{E}'^2 &= \mathfrak{H}'^2, \quad (\mathfrak{E}'\mathfrak{H}') = 0, \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

wobei die Richtung des Strahles durch seine Neigung ϑ' gegen die x'-Richtung und das Azimut φ' bestimmt ist, indem

$$\left.\begin{aligned} \cos(\mathfrak{S}'x') = \cos\vartheta', \quad \cos(\mathfrak{S}'y') &= \sin\vartheta'\cos\varphi' \\ \cos(\mathfrak{S}'z') &= \sin\vartheta'\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \quad (103\,a)$$

gesetzt worden ist. Schreiben wir (103) nach (85), (85a) und (85b) in die gegen die Lorentz-Transformation invariante Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{M}^2 = 0, \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*) = 0 \quad . \quad (103\,b)$$

so sieht man einmal, daß die von Ort und Zeit abhängige Funktion Θ eine Invariante sein muß, und zweitens, daß der Charakter des Vorganges als ebene Welle bei der Transformation nicht verloren geht.

Ersetzt man in der Gleichung für Θ gemäß (XI) x', y', z', t' durch x, y, z, t, so findet man:

$$\begin{aligned} \Theta &= 2\pi\nu\left\{t - \frac{1}{c}\left(x\cos\vartheta + \sin\vartheta(y\cos\varphi + z\sin\varphi)\right)\right\} \\ &= 2\pi\nu'\frac{1+\beta\cos\vartheta'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &\quad \left\{t - \frac{(\beta+\cos\vartheta')x + \sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}(y\cos\varphi' + z\sin\varphi')}{c(1+\beta\cos\vartheta')}\right\}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der vier unabhängigen Variablen x, y, z, t müssen beiderseits übereinstimmen. Daraus folgt: Die Schwingungszahl, bezogen auf das System K, ist

$$\nu = \nu'\frac{1+\beta\cos\vartheta'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

die Richtung des Strahles $\mathfrak{S}$ aber ist in demselben System durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \\ \cos\vartheta &= \frac{\cos\vartheta' + \beta}{1 + \beta\cos\vartheta'} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (105)$$

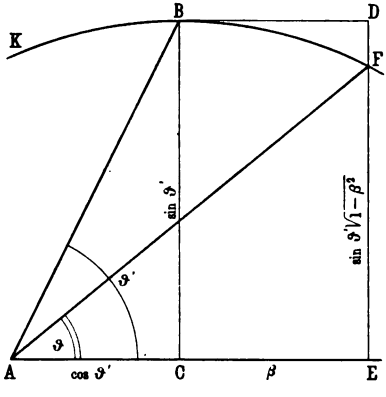
bestimmt. Andere Formen dieser Beziehung sind:

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\vartheta'}, \quad tg\,\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\vartheta' + \beta} \cdot \quad (105\,a)$$

Die letztere eignet sich zur geometrischen Konstruktion.

Ist nämlich in der Fig. 9 $\measuredangle BAC = \vartheta'$, $AB = 1$, so ist $AC = \cos\vartheta'$, $BC = DE = \sin\vartheta'$. Wählt man ferner $CE = \beta$*), $EF = ED\sqrt{1-\beta^2} = \sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}$, so ist $\measuredangle FAE = \vartheta$.

Fig. 9.



Verändert sich β, so beschreibt der Punkt F eine Ellipse K, deren Scheitel B ist. Sendet ein im Bezugssystem K' ruhender Fixstern der Erde (System K) Licht zu in der Richtung $\overrightarrow{AB}$, so hat dieser Strahl für den Beobachter auf der Erde die Richtung $\overrightarrow{AF}$. So findet die Aberration ihre Erklärung. Mit der elementaren, der Beobachtung angepaßten Theorie stimmt diese Konstruktion überein, wenn man zwischen den Punkten D und F nicht zu unterscheiden braucht; d. h. wenn man β^2 gegen 1 vernachlässigen kann. Die Besonderheit des Instrumentes, mit dem man ϑ bestimmt, ob man z. B. das Fernrohr mit Luft oder Wasser füllt, spielt gar keine Rolle dabei. Ferner wird die wahrgenommene Schwingungszahl ν durch die Richtung des Strahles beeinflußt. Vernachlässigt man Glieder zweiter Ordnung, so kann man

*) $\beta > 0$ ist vorausgesetzt, anderenfalls liegt E zwischen A und C.

in (104) $\beta \cos\vartheta' = \frac{q}{c}\cos\vartheta = \frac{q_r}{c}$ setzen, wenn r die Richtung $\overrightarrow{AF}$ bedeutet, und findet dann:

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{q_r}{c}\right).$$

Die Theorie steht daher in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Der Dopplereffekt verschwindet nicht — darin liegt ein vielleicht noch einmal experimentell nachzuprüfender Unterschied gegen die älteren Theorien —, wenn man senkrecht auf die Bahn der Lichtquelle blickt ($\cos\vartheta = 0$, $\cos\vartheta' = -\beta$); vielmehr ist dann $\nu = \nu'\sqrt{1-\beta^2}$.

Um die Transformationsgleichung für die Amplitude zu finden, läßt sich jede der Gleichungen (102) anwenden, da jede Komponente des Welttensors T in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ quadratisch, daher hier zu $\mathfrak{E}_0^2$ proportional ist. Z. B. ist nach (X):

$$\begin{aligned} p_{yz} &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z = (\mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{E}_{0z} + \mathfrak{H}_{0y}\mathfrak{H}_{0z})\sin^2\Theta \\ &= \mathfrak{E}_0^2\sin^2\Theta\{\cos(\mathfrak{E}_0 y)\cos(\mathfrak{E}_0 z) + \cos(\mathfrak{H}_0 y)\cos(\mathfrak{H}_0 z)\}. \end{aligned}$$

Nun liegen aber die Richtungen von $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{S}$ gemäß (14a) zueinander wie die x-, y-, z-Achse; infolgedessen ist nach den Orthogonalitätsbedingungen und (103a):

$$\begin{aligned} \cos(\mathfrak{E}_0 y)\cos(\mathfrak{E}_0 z) + \cos(\mathfrak{H}_0 y)\cos(\mathfrak{H}_0 z) &= -\cos(\mathfrak{S}y)\cos(\mathfrak{S}z) \\ &= -\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die entsprechende Formel gilt im gestrichenen System. Da aber $p_{yz} = p'_{yz}$ ist, folgt unter Berücksichtigung von (105a) und (104):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}_0^2}{\mathfrak{E}_0'^2} = \frac{W}{W'} = \frac{|\mathfrak{S}|}{|\mathfrak{S}'|} = \frac{\sin^2\vartheta'}{\sin^2\vartheta} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^2} \\ = \frac{(1+\beta\cos\vartheta')^2}{1-\beta^2} = \frac{\nu^2}{\nu'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (106)$$

Ruht in K' eine nach allen Seiten gleichmäßig strahlende Lichtquelle, d. h. ist die Intensität $|\mathfrak{S}'|$ ihrer Strahlung von der Richtung unabhängig, so strahlt sie, bezogen auf das System K, in welchem sie sich bewegt, in der Richtung ihrer Geschwindigkeit ($\cos\vartheta' > 0$) mehr Energie aus als in der entgegengesetzten.

b) Die Reflexion am bewegten Spiegel. Auf einen ebenen, im System K^0 ruhenden Spiegel fällt aus dem leeren Raum eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel ψ_1^0. Das Reflexionsgesetz sagt bekanntlich aus, daß der gespiegelte Strahl in der Einfallsebene liegt, und daß der Reflexionswinkel $\psi_2^0 = \psi_1^0$ ist. Die Schwingungszahl ν^0 ist in beiden Strahlen dieselbe; die Intensität $|\mathfrak{S}_2^0|$ des gespiegelten berechnet sich aus der des einfallenden $|\mathfrak{S}_1^0|$ und dem Reflexionsvermögen U gemäß der Gleichung

$$|\mathfrak{S}_2^0| = U|\mathfrak{S}_1^0| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Wir fragen, wie sich diese Gesetze ändern, wenn man den Spiegel bewegt, und zwar wollen wir ihm zur Vereinfachung der Rechnung eine Geschwindigkeit q parallel seiner Normalen zuschreiben. Wir führen dazu die Transformation auf ein anderes berechtigtes System K durch; es sollen sowohl die x- als die x^0-Achse die Richtung der in den leeren Raum hinausweisenden Normalen haben, so daß die Voraussetzungen der Transformation (XI) erfüllt sind, wenn man K^0 an die Stelle von K' setzt. Dabei ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{q}$, also $\beta = \mathfrak{q}_x/c$.

Die Neigung des einfallenden Strahles gegen die x^0- und x-Achse ist bestimmt durch die Winkel $\vartheta_1^0 = \pi - \psi_1^0$ und $\vartheta_1 = \pi - \psi_1$, die des gespiegelten durch die Reflexionswinkel ψ_2^0 und ψ_2 selbst. Infolgedessen gilt nach (105), (105a) und (106):

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\psi_1 = \frac{\cos\psi_1^0 - \beta}{1 - \beta\cos\psi_1^0} \qquad \cos\psi_2 = \frac{\cos\psi_2^0 + \beta}{1 + \beta\cos\psi_2^0} \\
&\cos\psi_1^0 = \frac{\cos\psi_1 + \beta}{1 + \beta\cos\psi_1} \qquad \cos\psi_2^0 = \frac{\cos\psi_2 - \beta}{1 - \beta\cos\psi_2} \\
&\frac{|\mathfrak{S}_1|}{|\mathfrak{S}_1^0|} = \frac{(1 - \beta\cos\psi_1^0)^2}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\psi_1)^2} \\
&\qquad\qquad = \frac{\sin^2\psi_1^0}{\sin^2\psi_1} = \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2} \\
&\frac{|\mathfrak{S}_2|}{|\mathfrak{S}_2^0|} = \frac{(1 + \beta\cos\psi_2^0)^2}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\psi_2)^2} \\
&\qquad\qquad = \frac{\sin^2\psi_2^0}{\sin^2\psi_2} = \frac{\nu_2^2}{\nu_0^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (108)$$

Aus den ersten dieser Formeln schließen wir:

$$tg^2\frac{\psi_1}{2} = \frac{1-\cos\psi_1}{1+\cos\psi_1} = \frac{1-\cos\psi_1^0}{1+\cos\psi_1^0}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta},$$

$$tg^2\frac{\psi_2}{2} = \frac{1-\cos\psi_2}{1+\cos\psi_2} = \frac{1-\cos\psi_2^0}{1+\cos\psi_2^0}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta};$$

also lautet das geometrische Gesetz der Spiegelung:

$$tg\frac{\psi_2}{2} : tg\frac{\psi_1}{2} = (c-\mathfrak{q}_x):(c+\mathfrak{q}_x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108\,a)$$

Der Reflexionswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel, wenn $\mathfrak{q}_x$ positiv ist, d. h. wenn der Spiegel sich dem einfallenden Strahl entgegen bewegt. Ferner folgern wir durch Division aus (108):

$$\nu_2 : \nu_1 = \sin\psi_1 : \sin\psi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108\,b)$$

Die Schwingungszahl wird durch die Spiegelung verändert, und zwar in dem soeben erwähnten Falle vergrößert. Auf diese Abart des Dopplerschen Prinzips bezieht sich der in § 2 erwähnte Versuch von Galitzin. Endlich aber folgt aus denselben Gleichungen und aus (107):

$$|\mathfrak{S}_2| = U\frac{\sin^2\psi_1}{\sin^2\psi_2}|\mathfrak{S}_1| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108\,c)$$

also auch die Intensität des gespiegelten Strahles wird in dem genannten Falle vergrößert. Im Grenzfall, daß der Einfalls- und damit der Reflexionswinkel verschwindet, wird nach (108a):

$$\lim_{\psi_1=0}\frac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2} = \left(\frac{c+\mathfrak{q}_x}{c-\mathfrak{q}_x}\right)^{*}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108\,d)$$

---

*) (108a) und (108b) gelten unverändert, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ eine beliebige Richtung hat; einfacher als durch Transformation auf Ruhe sieht man dies folgendermaßen ein: Ist

$$\sin\nu_1\{t - 1/c\,(-x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1)\}$$

der allen Feldgrößen der einfallenden Welle gemeinsame Faktor, und spielt $\sin\nu_2\{t - 1/c\,(x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2)\}$ dieselbe Rolle für die gespiegelte, so müssen an der Grenzebene des Spiegels vermöge der Grenzbedingungen (§ 21) beide einander gleich werden; diese Ebene hat aber die Gleichung $x = \mathfrak{q}_x t$.

§ 17. Gleichförmige Bewegung geladener Körper.

a) Das elektromagnetische Feld. Auch die Aufgabe, das Feld eines gleichförmig bewegten Ladungsträgers zu ermitteln, lösen wir durch „Transformation auf Ruhe". Im Ruhsystem K^0 haben wir nämlich ein gewöhnliches elektrostatisches Feld ($\mathfrak{E}^0$; $\mathfrak{H}^0$ ist gleich Null. Daraus folgt nach (85c), wenn wir wiederum die Transformation (XI) zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_x^0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\mathfrak{E}_y^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\mathfrak{E}_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{H}_x &= 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\beta\,\mathfrak{E}_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{\beta\,\mathfrak{E}_y^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot(109)$$

Die Gleichungen der zweiten Zeile kann man zusammenfassen in:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109\,a)$$

da $\mathfrak{q} \parallel x$ und $\beta = q/c$ ist.

Bezeichnet man ferner den Winkel zwischen der elektrischen Feldstärke und der Geschwindigkeit mit ϑ, so gilt:

$$tg\,\vartheta = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2}}{\mathfrak{E}_x} = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_y^{0\,2} + \mathfrak{E}_z^{0\,2}}}{\mathfrak{E}_x^0\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{tg\,\vartheta^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cdot\ (109\,b)$$

Verkürzt man daher in der das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}^0$ darstellenden Kraftlinienfigur alle der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ parallelen Strecken im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$, so erhält man die Kraftlinienfigur für das System K. Denn einmal entspricht diese Verkürzung der Lorentz-Kontraktion (§ 7), so daß wir zu jedem Punkt in K^0 dabei den entsprechenden Punkt in K finden, zugleich aber vergrößern alle Kurven ihre Neigung gegen die genannte Richtung in dem von der letzten Gleichung geforderten Maße.

Auch die Niveauflächen des elektrostatischen Potentiales $\varphi^0(x^0, y^0, z^0)$ in K^0 behalten bei dieser Konstruktion eine Bedeutung. Die Kraft $\mathfrak{K}$, welche auf eine mitbewegte Punktladung e ausgeübt wird, transformiert sich nämlich nach Gleichung (87a), deren Vorbedingung hier erfüllt ist, wie folgt:

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x^0, \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y^0\sqrt{1-\beta^2}, \quad \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}_z^0\sqrt{1-\beta^2} \quad \ldots\ (110)$$

Nun ist aber im statischen Felde des Systems K^0

$$\mathfrak{R}^0 = -e\,grad\,\varphi^0(x^0, y^0, z^0),$$

wo φ^0 das elektrostatische Potential bedeutet, also nach (82) und (110):

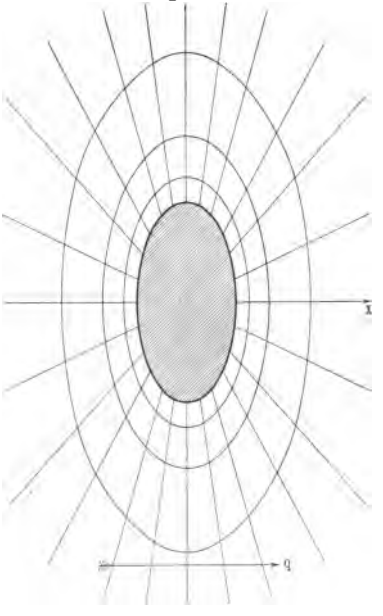
$$\mathfrak{R} = -e\,grad\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110a)$$

wobei ψ das „dynamische Potential“

$$\left.\begin{aligned}\psi(x, y, z, t) &= \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} \cdot \varphi^0\left(\frac{x-qt}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, y, z\right) \\ &= \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\,\varphi^0(x^0, y^0, z^0)\end{aligned}\right\} \cdot \quad (110b)$$

ist. Die Niveauflächen $\varphi^0 = const$ gehen also in Flächen $\psi = const$ über. Jede Begrenzung eines leitenden Körpers ist eine solche. Aber statt der elektrischen Feldstärke steht jetzt die ponderomotorische Kraft auf ihnen senkrecht, denn die rechten Winkel zwischen den elektrischen Kraftlinien und Niveauflächen bleiben bei der Verzerrung nicht erhalten.

Fig. 10.



b) Das Feld eines bewegten Elektrons. Das Kraftfeld einer ruhenden Kugel mit gleichförmiger Oberflächenladung ist der Gleichwertigkeit aller Richtungen wegen durch eine Reihe radialer Kraftlinien mit konstantem Winkelabstand bestimmt. Die Potentialflächen sind Kugeln, deren Radien wie die reziproken Werte der abnehmenden Reihe der ganzen Zahlen wachsen, wenn man das Potential stets um den gleichen Betrag verkleinert, denn es ist

$$\varphi^0 = \frac{e}{4\pi\sqrt{x^{0^2} + y^{0^2} + z^{0^2}}}.$$

Verzerrt man nun die Figur in der angegebenen Art, so entsteht als Schnitt mit einer zur Geschwindigkeit q parallel durch den Mittelpunkt gelegten Ebene Fig. 10, welche demnach das Kraftfeld eines bei Ruhe kugelförmigen, bewegten Elektrons ($q = 0{,}866\,c$) darstellt. Seiner Form nach ist es wegen der Lorentz-Kontraktion ein abgeplattetes Rotationsellipsoid Die Dichte der Kraftlinien ist hier, wie in der Potentialtheorie, ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes, da jede Kraftröhre an der gleichen Flächenladung endigt, wie aus der Konstruktion hervorgeht; der Abstand der Niveauflächen des dynamischen Potentials

$$\psi = \frac{e(1 - q^2/c^2)}{4\pi\sqrt{(x - qt)^2 + (1 - q^2/c^2)(y^2 + z^2)}}$$

bestimmt dagegen den Betrag der Kraft $\mathfrak{R}$. Man sieht, jenes ist am stärksten in der Äquatorialebene des Ellipsoids, diese hingegen in der Achse. Die Linien der magnetischen Feldstärke sind wegen der Rotationssymmetrie und nach (109a) Kreise, deren Mittelpunkte in der Achse liegen; die Linien der Kraft $\mathfrak{R}$ dagegen sind als die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen $\psi = const$ parabolische Kurven mit den Gleichungen:

$$y/z = const, \quad x - qt = const.\sqrt{y^2 + z^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}.$$

c) Die Rückwirkung des Feldes auf bewegte Träger von Ladungen. Da die Gesamtkraft, welche ein in K^0 ruhender Körper in seinem elektrostatischen Felde erfährt, Null ist, so gilt dies nach (87a) auch für die gesamte Kraft, die er bei gleichförmiger Bewegung von seinem Felde erleidet. Es bedarf also keiner äußeren Kraft, um die stationäre Bewegung zu unterhalten. Von Null verschieden dagegen ist im allgemeinen das Drehmoment der elektromagnetischen Kräfte. Wählen wir nämlich in (99) als Grenze des Integrationsbereiches eine Kugel um irgend einen Punkt im Ladungsgebiet, deren Radius R wir dann immer weiter wachsen lassen, so verschwinden schließlich, wie man aus (109) und (109a) ersieht, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{E}^0$ wie R^{-2}; da der Tensor $\boldsymbol{p}$ in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ quadratisch ist, konvergiert das Oberflächenintegral in Gleichung (100) dann gegen Null.

In dem zweiten Integral $-\frac{d}{dt}\int[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e]\,dS$ wollen wir neben dem im Raume festen Anfangspunkt V des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ einen im Körper ruhenden materiellen Punkt P als Anfang eines Radiusvektors $\mathfrak{R}$ einführen, so daß

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}_0$$

ist, wenn $\mathfrak{r}_0$ die Strecke $\overrightarrow{VP}$ bezeichnet. Dann ist

$$\mathfrak{N} = -\frac{d}{dt}\int[\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{g}_e]\,dS = -\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}_0, \int \mathfrak{g}_e\,dS] = -[\dot{\mathfrak{r}}_0, \mathfrak{G}_e],$$

da $\int[\mathfrak{R}\,\mathfrak{g}_e]\,dS$ zeitlich unveränderlich ist; in jedem die Bewegung mitmachenden Punkt des ganzen unendlichen Feldes ist nämlich sowohl $\mathfrak{R}$ wie $\mathfrak{g}_e$ konstant. $\dot{\mathfrak{r}}_0$ ist aber nichts anderes als die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$. Somit wird

$$\mathfrak{N} = -[\mathfrak{q}\,\mathfrak{G}_e] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

Liegt der elektromagnetische Impuls $\mathfrak{G}_e$ des Feldes eines bewegten geladenen Körpers nicht in der Richtung der Geschwindigkeit, so üben die elektromagnetischen Kräfte ein Drehmoment auf ihn aus [Abraham[1]]. Trotzdem darf keine Drehung eintreten, da in K^0 die elektrostatischen Kräfte keine Änderung der Lage bewirken. Es wird die Aufgabe der Mechanik sein, nachzuweisen, wodurch dies elektromagnetische Drehmoment aufgehoben wird. Wir wollen schon hier bemerken, daß dies die mechanischen Spannungen sind, welche im Körper den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht halten.

d) Energie und Impuls des Feldes. Zur Berechnung der Energie und ihrer Stromdichte im Felde des bewegten Körpers dienen die Gleichungen (102); in ihnen ist nach (X), (14a) und (VIIIa)

$$\boldsymbol{p}^0_{xx} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{02} - \mathfrak{E}^{02}_x, \quad \boldsymbol{p}^0_{xy} = -\mathfrak{E}^0_x\mathfrak{E}^0_y, \quad \boldsymbol{p}^0_{xz} = -\mathfrak{E}^0_x\mathfrak{E}^0_z.$$
$$\mathfrak{S}^0 = 0, \quad W^0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{02}, \quad \beta = q/c, \quad v = q$$

zu setzen, also wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{q\,(2\,W^0 - \mathfrak{E}^{02}_x)}{1 - q^2/c^2} \qquad \mathfrak{S}_y = \frac{-\,q\,\mathfrak{E}^0_x\,\mathfrak{E}^0_y}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{-\,q\,\mathfrak{E}^0_x\,\mathfrak{E}^0_z}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} \qquad W = \frac{W^0\,(1 + q^2/c^2) - q^2/c^2\,\mathfrak{E}^{02}_x}{1 - q^2/c^2} \end{aligned}\right\} . \quad (112)$$

Den Gesamtimpuls $\mathfrak{G}_e = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\, dS$ und die Gesamtenergie $E = \int W dS$ findet man hieraus durch Integration über das gesamte Feld. Dabei wird nach (24)

$$\int W^0 dS = \sqrt{1-\beta^2}\int W^0 dS^0 = \sqrt{1-\beta^2}\, E^0.$$

e) **Beispiel des kugelförmigen Elektrons.** Führt man diese Rechnung für das in Ruhe kugelförmige Elektron aus, so wird aus Symmetriegründen

$$\int \mathfrak{E}_x^{0^2} dS = \sqrt{1-\beta^2}\int \mathfrak{E}_x^{0^2} dS^0$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{1-\beta^2}\int \mathfrak{E}^{0^2} dS^0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{1-\beta^2}\, E^0,$$

dagegen

$$\int \mathfrak{E}_x^0 \mathfrak{E}_y^0 dS = \sqrt{1-\beta^2}\int \mathfrak{E}_x^0 \mathfrak{E}_y^0 dS^0 = 0;$$

denn es gibt in K^0 zu jedem Volumelement dS^0 ein ihm in bezug auf die $y^0 z^0$-Ebene symmetrisch gelegenes, in welchem $\mathfrak{E}_x^0 \mathfrak{E}_y^0$ den entgegengesetzt gleichen Wert hat. Ebenso ist

$$\int \mathfrak{E}_x^0 \mathfrak{E}_z^0 dS = 0.$$

Also wird

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{G}_{ex} = \tfrac{4}{3}\frac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}\, E^0, \quad \mathfrak{G}_{ey} = \mathfrak{G}_{ez} = 0, \\ \text{d. h.}\quad &\mathfrak{G}_e = \frac{4\, E^0 q}{3\, c\sqrt{c^2-q^2}}, \quad E = \frac{c^2 + \frac{1}{3}q^2}{c\sqrt{c^2-q^2}}\, E^0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (113)$$

Bei gleichmäßiger Oberflächenladung ist die Energie $E^0 = \frac{e^2}{8\pi a}$, wenn a den Radius bezeichnet; und bei gleichmäßiger Volumladung hat sie den nur wenig größeren Wert $E^0 = \frac{3}{20\pi}\frac{e}{a}$.

Ein Drehmoment tritt nach (111) und (113) nicht auf, was ja auch aus Symmetriegründen einleuchtet. Die hier berechneten Werte von $\mathfrak{G}_e$ und E gelten streng nur für völlig unbeschleunigte Bewegung. Doch wird man sie als brauchbare Näherung anwenden können, wenn die Beschleunigung so gering ist, daß sie keinen erheblichen Einfluß auf das Feld hat. Man spricht in diesem Falle von „quasistationärer“ Bewegung.

f) Der Trouton-Noblesche Versuch. Der bewegte Ladungsträger besteht hier aus einem Plattenkondensator. Bildet die Normale der Platten mit der x-Richtung den Winkel ϑ bzw. ϑ^0, so ist in K^0, wenn wir außerdem z senkrecht zu ihr annehmen:

$$\mathfrak{E}_x^0 = |\mathfrak{E}^0| \cos\vartheta^0, \quad \mathfrak{E}_y^0 = |\mathfrak{E}^0| \sin\vartheta^0, \quad \mathfrak{E}_z^0 = 0,$$

wobei $|\mathfrak{E}^0|$ zwischen den Platten räumlich konstant ist. Bei der Ausführung der Integration in (112) finden wir somit:

$$\mathfrak{G}_{ex} = \frac{2\,q \sin^2\vartheta^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E^0, \quad \mathfrak{G}_{ey} = -\frac{q \sin 2\vartheta^0}{c^2} E^0, \quad \mathfrak{G}_{ez} = 0 \quad (114)$$

Wegen der Lorentz-Kontraktion bildet die Plattennormale im System K einen anderen Winkel ϑ mit der x-Achse als in K^0; doch ist der Unterschied eine Größe zweiter Ordnung. Die Komponente von $\mathfrak{G}_e$ in der Richtung der Normale ist somit bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{G}_{en} = \mathfrak{G}_{ex} \cos\vartheta^0 + \mathfrak{G}_{ey} \sin\vartheta^0 = 0.$$

Mit dieser Genauigkeit liegt daher der Impuls $\mathfrak{G}$ parallel den Platten. Das Drehmoment, welches gemäß (111) auf den Kondensator um eine in der z-Richtung liegende Achse ausgeübt wird, hat nach (114) den Betrag

$$|q\,\mathfrak{G}_{ey}| = \frac{q^2 \sin 2\vartheta^0}{c^2} \cdot E^0.$$

Trouton und Noble befestigten nun den Kondensator, zunächst ungeladen, an einer äußerst empfindlichen bifilaren Aufhängung. Sie erwarteten dann bei seiner Ladung als Folge der Erdbewegung eine Drehung aus der Anfangslage. Diese blieb aus, wie es nach dem Relativitätsprinzip sein muß. Doch beweist dies keineswegs das Fehlen des hier berechneten Drehungsmomentes, sondern nur, daß die Theorie noch durch die Berücksichtigung der Mechanik der elastisch gespannten Körper zu ergänzen ist.

§ 18. Ungleichförmig bewegte Ladungsträger.

a) Das Viererpotential. Die Form der Gleichung (XIV) legt es nahe, zur Untersuchung des Feldes beliebig bewegter Elektrizitätsmengen einen neuen Vierervektor, das Vierer-potential Φ durch die Definition

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

einzuführen. Denn dann wird nach § 12, c)

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{Rot}^*\,\Phi;$$

also wird (XIV) nach Rechnungsregel (66) identisch erfüllt. Die Gleichung (XIII) dagegen geht nach (69) über in

$$\Box\,\Phi - \Gamma\varrho\alpha\delta\,(Div\,\Phi) = -P \quad \ldots\ldots \quad (115\,a)$$

Indessen ist durch den Ansatz (115) bei gegebenem $\mathfrak{M}$ der Vektor Φ noch nicht vollständig bestimmt; man kann ihm noch einen Vektor Ψ hinzufügen, welcher sich als Gradient einer skalaren Funktion $U(x, y, z, l)$ darstellt. Denn dann ist $\mathfrak{Rot}\,\Psi = 0$. Wir wollen nun noch die Nebenbedingung hinzufügen, daß

$$Div\,\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

sein soll, so daß Φ der Potentialgleichung in vier Dimensionen

$$\Box\,\Phi = -P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116\,a)$$

genügt. Jener eventuell hinzutretende Vektor muß dann auch noch die zweite Bedingung $Div\,\Psi = 0$ erfüllen, und $\Psi = 0$ ist zwar nicht der einzige, jedenfalls aber ein möglicher Ansatz dazu. Die Definitionen (115) und (116) vertragen sich also miteinander *).

Zur Integration der Potentialgleichung (116a) fragen wir zunächst nach dem Viererpotential einer im System K^0 ruhenden Punktladung de für den Aufpunkt $x^0 = 0$, $y^0 = 0$, $z^0 = 0$ und (was zunächst belanglos ist) für den Moment $t^0 = 0$; d. h. für den Weltpunkt O, wenn wir die Bezeichnungsweise von Fig. 5 (S. 48) zugrunde legen. Da $q^0 = 0$ ist, so ist von dem Komponenten des Viererstromes P nur die l^0-Komponente von Null

*) Im Dreidimensionalen ist bekanntlich jeder Vektor durch Angabe der Rotation und der Divergenz eindeutig bestimmt. Der Beweis dafür beruht darauf, daß eine skalare Funktion φ eine Konstante ist, wenn

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dS = 0$$

ist. Im Vierdimensionalen gilt nichts Analoges, weil die vierte Koordinate l imaginär ist.

verschieden, und wegen der Unabhängigkeit aller Größen von l^0 geht $\Box P$ in

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{02}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^{02}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^{02}}$$

über. Aus (116a) wird demnach die Potentialgleichung für drei Dimensionen, deren Lösung für den vorliegenden Fall lautet:

$$\left.\begin{gathered} \Phi_{x^0} = 0,\ \Phi_{y^0} = 0,\ \Phi_{z^0} = 0,\ \Phi_{l^0} = \frac{ide}{4\pi r^0} \text{ bzw. } \Phi_{u^0} = \frac{de}{4\pi r^0} \\ r^{02} = x^{02} + y^{02} + z^{02} \end{gathered}\right\} (117)$$

wo x^0, y^0, z^0 der Ort von de ist. Diese Werte genügen auch der Gleichung (116). Das Viererpotential hat also die Richtung der Weltlinie von de, d. h. es ist zur Vierergeschwindigkeit Y [vgl. (51)] parallel.

Auf den Weltpunkt O wirken elektromagnetisch nur Punkte seines Vorkegels, von der genannten Weltlinie daher nur ihr Schnittpunkt L mit diesem, ihr sog. Lichtpunkt bezüglich O. Es gibt auch bei einer gekrümmten Weltlinie nur einen solchen Lichtpunkt, da die Richtung der Weltlinie nach § 8 stets zeitartig ist. Die (im Sinne von § 10a) senkrechte Projektion von L auf den xyz-Raum irgend eines berechtigten Systems K bezeichnen wir mit P. Den Vierervektor $\overrightarrow{0L}$ nennen wir Π. Seine Projektion auf denselben Raum bildet den Raumvektor $\overrightarrow{0P} = \mathfrak{r}_P$ mit den Komponenten x_P, y_P, z_P. Die Komponenten von Π sind demnach

$$\Pi_x = x_P \text{ usw.}, \quad \Pi_u = -r_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117a)$$

P ist der Ort der Punktladung de, bezogen auf das System K, welchen sie, als sie die im Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zur Zeit $t = 0$ eintreffende Wirkung absandte, d. h. zur Zeit $-r_P/c$, innehatte. Im System K^0 sind die Koordinaten x_P usw. mit x^0 usw. identisch.

Das skalare Produkt aus Π und Φ ist nach (117), (117a), (48) und (50):

$$(\Pi\Phi) = \Pi_{l^0}\Phi_{l^0} = -\Pi_{u^0}\Phi_{u^0} = \frac{de}{4\pi}.$$

Hieraus und aus der obigen Angabe über seine Richtung läßt sich der Vektor Φ eindeutig bestimmen; es ist nämlich der Vektor:

$$\Phi = \frac{de}{4\pi}\frac{Y}{(\Pi Y)},$$

der einzige in der Richtung von Y gelegene, dessen skalares Produkt mit Π den angegebenen Wert hat. Da aber nur die Richtung der Weltlinie im Punkte L in Frage kommt, können wir ihren sonstigen Verlauf beliebig abändern, die Annahme, daß de in K^0 dauernd ruht, also fallen lassen. Dann ist für Y die dem Punkte L entsprechende Vierergeschwindigkeit hier einzusetzen. Die Formel

$$\Phi = \frac{de}{4\pi}\left(\frac{Y}{(\Pi Y)}\right)_L \quad \cdots\cdots\cdots \quad (118)$$

gibt also das Viererpotential einer beliebig bewegten Punktladung de an.

In einem beliebigen System K ist nach (51), (48) und (117a):

$$(Y_x)_L = \left(\frac{q_x}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right)_P \text{ usw.}, \quad (Y_u)_L = \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right)_P$$

$$(\Pi Y)_L = \frac{(x q_x + y q_y + z q_z + r c)_P}{\sqrt{c^2 - q^2}}$$

$$= \frac{c r_P}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left[1 + \frac{1}{c}\left(q_x \frac{x}{r} + q_y \frac{y}{r} + q_z \frac{z}{r}\right)\right]_P$$

$$= \frac{c r_P}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left(1 + \frac{q_r}{c}\right)_P,$$

wobei der Index P darauf hinweisen soll, daß für x, y, z die Koordinaten von P, für q aber die Geschwindigkeit zu wählen ist, welche de besaß, als es sich in P befand. Man kann ihn auch durch den Index $-r/c$ ersetzen und findet dann aus (118):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{de}{4\pi c}\left[\frac{q_x}{r(1 + q_r/c)}\right]_{-\frac{r}{c}} \text{ usw.}, \\ \Phi_u &= \frac{de}{4\pi\left[r(1 + q_r/c)\right]_{-\frac{r}{c}}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (118a)$$

Um sie auf endliche Elektrizitätsmengen anzuwenden, muß man noch die Integration über alle de ausführen.

Eine andere Formulierung derselben Beziehung finden wir, wenn wir auf die räumliche Ausdehnung der Ladungen de Rücksicht nehmen. Denken wir uns de zunächst wieder im System K^0 ruhend, so haben wir nach (117):

$$\Phi_{x^0} = 0 \text{ usw.}, \quad \Phi_{l^0} = \frac{i\varrho^0 dv^0}{4\pi r^0},$$

d. h. unter Berücksichtigung von (83):

$$\Phi = \frac{dv^0}{4\pi r^0} P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

zu setzen. Statt von einer einzelnen Weltlinie, müssen wir aber jetzt von der Gesamtheit aller der Weltlinien reden, welche Punkte des Volumens dv_0 repräsentieren; sie erfüllen, da sie im allgemeinen einander annähernd parallel verlaufen, eine Weltröhre (welche im speziellen Falle gleichförmiger Bewegung in einen Zylinder übergeht). Diese Röhre schneidet bei dem Punkt L aus dem Vorkegel einen infinitesimalen Raum $d\omega$ aus, welcher sich nach § 11 c), γ) als ein auf dem Vorkegel senkrechter Vierervektor $\mathfrak{Q}$ auffassen läßt. $\mathfrak{Q}_u$ ist die bei P gelegene orthogonale Projektion dS von $d\omega$ auf den xyz-Raum. Infolgedessen ergibt der Schlußsatz von § 10 a), daß das Verhältnis

$$-\frac{|\mathfrak{Q}|}{|\Pi|} = -\frac{\mathfrak{Q}_u}{\Pi_u} = \frac{dS}{r_P}$$

für alle Systeme K denselben Wert hat. Im System K^0 aber ist:

$$dS = dv^0, \quad r_P = r^0,$$

also gilt:

$$\frac{dv^0}{r^0} = \frac{dS}{r_P}, \quad \Phi = \frac{P}{4\pi}\frac{|\mathfrak{Q}|}{|\Pi|} = \frac{P dS}{4\pi r_P}.$$

Ersetzen wir schließlich P durch den auf dem Lichtpunkt L bezüglichen Viererstrom P_L:

$$\Phi = \frac{dS}{4\pi r_P} P_L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

so ist auch hier die Annahme gleichförmiger Bewegung belanglos geworden, da das Volumen $d\omega$ nur von der Richtung, nicht von der Krümmung der Weltröhre im Punkte L abhängt. Die Summation über alle Ladungen ist hier durch eine Integration über den ganzen Vorkegel zu ersetzen; oder was dasselbe sagt, durch eine Integration nach dS über den ganzen xyz-Raum, wobei freilich dem Viererstrom P der Wert zu geben ist, welcher in dem dS entsprechenden Volumen des Vorkegels, d. h. zur Zeit $-r/c$

gilt. Wir deuten dies passend durch den Index $-r/c$ an und finden so:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int [P]_{\frac{r}{c}} \frac{dS}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120a)$$

b) Die retardierten Potentiale. Wir wollen jetzt diesen Gleichungen ihre vierdimensionale Gestalt abstreifen. Man sieht an dem Auftreten der Geschwindigkeit q in den Formeln (118a), daß die räumlichen Komponenten von Φ einen Raumvektor, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, bilden, während die vierte Komponente eine im gewöhnlichen dreidimensionalen Sinne skalare Größe, das skalare Potential $\varphi = \Phi_u$ bestimmt. Die Differentialgleichungen (115), (116) und (116a) gehen unter Berücksichtigung von (74) und (63) über in:

$$\mathfrak{E} = -\,grad\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{H} = rot\,\mathfrak{A} \quad \ldots \quad (115')$$

$$div\,\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116')$$

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{q}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c}\ddot{\psi} = -\varrho \quad (116'a)$$

Die in den Gleichungen (118a) und (120a) steckenden Lösungen der letzten von ihnen aber lauten, wenn wir noch die Beschränkung auf den Moment $t = 0$ aufheben und den Index $-r/c$ dementsprechend durch $t - r/c$ ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{4\pi c}\int de\left[\frac{\mathfrak{q}}{r\left(1+\frac{q_r}{c}\right)}\right]_{t-\frac{r}{c}} = \frac{1}{4\pi c}\int [\varrho\,\mathfrak{q}]_{t-\frac{r}{c}}\frac{dS}{r} \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{de}{\left[r\left(1+\frac{q_r}{c}\right)\right]_{t-\frac{r}{c}}} = \frac{1}{4\pi}\int [\varrho]_{t-\frac{r}{c}}\frac{dS}{r} \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Der Radiusvektor r ist dabei als vom Aufpunkt fortweisend angenommen; q_r ist daher negativ, wenn de sich dem Aufpunkt nähert. Man bezeichnet $\mathfrak{A}$ und φ als retardierte Potentiale, weil nicht der augenblickliche, sondern der um die Zeit r/c zurückliegende Zustand des Raumelementes dS für sie in Frage kommt. Ihre Ableitung aus dem elektrostatischen Potential bürgt dafür,

daß (121) gültig bleibt, auch wenn der Aufpunkt in das geladene Gebiet hineinrückt. — Die auf die Elektrizitätsquanten bezügliche Form der Gleichungen (121) ist von Liènard[1]) und E. Wiechert[2]), die andere, ältere, von H. A. Lorentz[3]) angegeben worden.

c) Die Hyperbelbewegung. Wir wollen diese Formeln benutzen, um die Kraft $\mathfrak{K}$ zu berechnen, welche ein bewegtes Elektron auf sich selbst ausübt. Im Falle der gleichförmigen Bewegung ist diese nach § 17, c) stets Null. Im allgemeinsten Falle hat zwar A. Sommerfeld 1904 bis 1905 die Berechnung durchgeführt, aber unter der damals selbstverständlichen Annahme, daß die Form des Elektrons durch die Bewegung nicht verändert wird, was die Relativitätstheorie nicht anerkennen kann. Es ist auch vorläufig gar nicht möglich, diese Annahme durch etwas Besseres zu ersetzen; denn wenn wir auch wissen, daß bei gleichförmiger Geschwindigkeit Kontraktion stattfindet, so können wir doch den Einfluß einer Beschleunigung und noch dazu einer zeitlich veränderlichen nicht einmal abschätzen. Das allgemeine Problem ist daher bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft mathematisch gar nicht zu formulieren. Beschränken wir uns aber auf eine Bewegung, bei welcher die Beschleunigung bezogen auf das jeweils mitbewegte System K^0 konstant bleibt, so steht wenigstens fest (vgl. S. 107), daß der Zustand, bezogen auf K^0, immer derselbe ist, daß also Gestalt und Ladungsverteilung in K^0 unverändert bleibt. Von der Gestalt selbst dagegen wissen wir nur, daß das nach Voraussetzung bei völliger Ruhe kugelförmige Elektron eine Rotationsfigur mit der Beschleunigungsrichtung als ausgezeichneter Achse annimmt. Dies reicht aber auch aus, um ein für kleine Beschleunigungen gültiges Resultat zu erzielen.

Die Transformationsformeln für die Beschleunigung erhalten wir für den speziellen Fall (XI) durch Wiederholung der Zeitdifferentiation an den Gleichungen (25a). Man findet so unter Berücksichtigung der aus (XIa) folgenden Beziehung

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v\,q'_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_x &= \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2+v q_x'}\right)^3 \dot{q}_x', \\ \dot{q}_y &= \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2+v q_x'}\right)^2 \left(\dot{q}_y' - \frac{v q_y' \dot{q}_x'}{c^2+v q_x'}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

(die y- und z-Komponente transformieren sich gleichartig). Ersetzen wir das System K' durch K^0 ($q' = 0$, $v = q$), so ergibt sich:

$$\dot{q}_x = \frac{\sqrt{c^2-q^2}^3}{c^3}\,\dot{q}_x^0, \quad \dot{q}_y = \frac{c^2-q^2}{c^2}\,\dot{q}_y^0 \quad . \quad . \quad (122\,a)$$

Wir setzen jetzt $\dot{q}_x^0$ als zeitlich konstant $= b$ an, ferner $\dot{q}_y^0 = \dot{q}_z^0 = 0$; ist dann noch $q_y = q_z = 0$, also $q_x^2 = q^2$, so folgt durch Integration aus (122a):

$$\frac{q_x}{\sqrt{c^2-q^2}} = \frac{b\,(t-t_0)}{c}.$$

Lassen wir durch passende Wahl des Zeitanfanges die Konstante t_0 fortfallen, so liefert die Auflösung nach q_x und eine nochmalige Integration:

$$\pm q_x = \pm\frac{dx}{dt} = \frac{c\,b\,t}{\sqrt{c^2+b^2t^2}}, \quad \pm (x-x_0) = \frac{a}{b}\sqrt{c^2+b^2t^2},$$

und wenn wir den Koordinatenanfang so bestimmen, daß $x_0 = 0$ wird:

$$x^2 - c^2t^2 = x^2 - u^2 = c^4/b^2, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \quad . \quad (123)$$

Die Weltlinie dieser Bewegung ist also eine gleichseitige Hyperbel in einer zur x- und u-Achse parallelen Ebene, deren Achsenlänge

$$\xi = c^2/b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123\,a)$$

um so kleiner ist, je größer die Beschleunigung ist. Zur Zeit $-\infty$ hat der Massenpunkt die Geschwindigkeit $q_x = -c$, zur Zeit $+\infty$ $q_x = +c$. Diese Hyperbelbewegung, wie wir sie mit Born nennen wollen, veranschaulicht recht deutlich den Unterschied der Einsteinschen gegen die klassische Kinematik, da in der letzteren die gleichförmig beschleunigte Bewegung zu der Parabel

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}\,b\,t^2$$

führte, bei welcher mit wachsendem u die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ über alle Grenzen wächst.

Ein allgemeineres Interesse bietet diese Bewegung, weil sich jede Weltlinie, welche doch im allgemeinen eine dreifach gekrümmte Kurve ist, sich auf ein kurzes Stück durch solche Hyperbel annähern läßt. Wir nennen die Hyperbel dann mit Minkovski die Krümmungshyperbel, und gelangen zu ihr durch eine Konstruktion, welche durchaus dem Verfahren zur Auffindung des Krümmungskreises einer Raumkurve nachgebildet ist. Ziehen wir nämlich in zwei infinitesimal benachbarten Punkten der Weltlinie die Tangenten, so bestimmen diese die oskulierende Ebene, welche wir uns unbeschadet der Allgemeinheit als xu-Ebene denken können, weil die Tangenten einer Weltlinie stets zeitartige Richtung haben (§ 8). In der oskulierenden Ebene gibt es nun stets eine Hyperbel, welche mit der vorgegebenen Kurve die beiden Tangenten und ihre Berührungspunkte gemeinsam hat und deren Asymptoten den Geraden $x = \pm u$ parallel sind. Die erstere Bedingung liefert nämlich drei, die zweite zwei von den fünf Bestimmungsstücken, welche zur eindeutigen Bestimmung einer Hyperbel notwendig sind. Wie sich die Krümmungshyperbel einer Kurve schon weit inniger anschließt als ihre Tangente, so stellt die Hyperbelbewegung eine weit bessere Annäherung an eine beliebig vorgegebene dar, als die geradlinige Bewegung.

Die Koordinaten ξ, η, ζ des Achsenpunktes der Hyperbel

$$x^2 - u^2 = \xi^2, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \ . \ . \ . \ . \quad (123b)$$

sind Invarianten der Transformation (XI). Die Achsenpunkte verschiedener, durch die Werte von ξ, η, ζ unterschiedenen Hyperbeln liegen daher in jedem System K', welches sich durch (XI) aus K ableiten läßt, ebenso zueinander wie in K. Ein Körper, dessen Punkte durch derartige Hyperbeln als Weltlinien dargestellt sind, hat daher in jedem dieser Systeme, in dem Moment, da er in ihm ruht, genau dieselbe Form; er bewegt sich wie ein starrer Körper*). Bezogen auf ein und dasselbe System verändert

*) Der in der klassischen Mechanik so überaus nützliche Grenzbegriff des unter allen Umständen starren Körpers läßt sich meines Erachtens wegen der Unmöglichkeit unendlich großer Geschwindigkeiten für die Ausbreitung elastischer Störungen nicht übertragen[4]). Das schließt aber nicht aus, daß sich gelegentlich ein Körper wie ein starrer bewegt; kann sich doch auch nach der klassischen Hydrodynamik ein Flüssigkeitsteilchen unter Umständen bewegen, als wäre es starr.

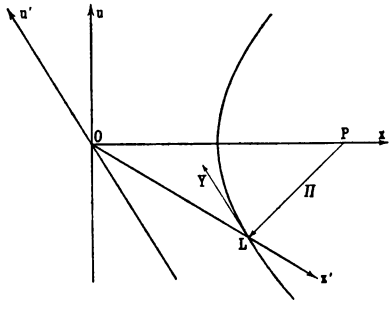
er natürlich seine Form entsprechend der Lorentz-Kontraktion. Diese Bewegung wollen wir im folgenden dem Elektron zuschreiben.

d) Das Viererpotential bei der Hyperbelbewegung. Der erste Schritt zur Lösung der Aufgabe besteht in der Berechnung des Viererpotentials. Dabei beschränken wir uns aber auf Aufpunkte, welche mit dem Mittelpunkt O der Hyperbelbewegung gleichzeitig gemacht werden können (§ 8). Denn alle Hyperbeln (123 b) liegen, da

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0,$$

notwendig im Zwischengebiet; Weltpunkte diesseits oder jenseits von O können niemals innere Punkte des Elektrons darstellen. Ferner möge der Aufpunkt P vorläufig im Raume $u = 0$ der Fig. 11 liegen und dort die Koordinaten X, Y, Z haben. Die Hyperbel sei die Weltlinie eines Ladungselementes de, L ihr Lichtpunkt in bezug auf P. Im allgemeinen wird natürlich weder die Hyperbel, noch der Aufpunkt in der XU-Ebene selbst liegen, so daß unsere Figur nur als Projektion einer Raumfigur zu betrachten ist. Die Projektion der Geraden $\overrightarrow{OL}$ nehmen wir als die X'-Achse eines Systems K', in welchem P die Koordinaten X', Y', Z', $L' = iU'$ hat. Dann ist die Viergeschwindigkeit Y in L parallel zur u'-Achse, und da vom Vektor $\Pi = \overrightarrow{PL}$ die u'-Komponente $\Pi_{u'} = -U'$ ist, so wird:

Fig. 11.



$$(Y\Pi) = -Y_{u'}\Pi_{u'} = Y_{u'}U'$$

also nach (118):

$$\Phi_{x'} = \Phi_{y'} = \Phi_{z'} = 0, \quad \Phi_{l'} = i\Phi_{u'} = i\frac{de}{4\pi U'} = -\frac{de}{4\pi L'}.$$

Um nun Φ in Komponenten nach der x- und u-Achse zu zerlegen, wenden wir die Formeln (34) und die Regel an, daß

sich die Komponenten eines Vierervektors Φ wie die Koordinaten transformieren. Dabei ist aber nach (30)

$$\beta = \beta_L = -tg(< POL) = \frac{U_L}{X_L} < 0.$$

So finden wir:

$$L' = -\frac{i\beta X}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Phi_x = \frac{-i\beta\Phi_{l'}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Phi_l = \frac{\Phi_{l'}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

also, wenn wir den für $\Phi_{l'}$ gefundenen Wert einsetzen:

$$\Phi_x = -\frac{de}{4\pi X}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_l = \frac{-ide}{4\pi\beta_L X}.$$

Um diese Gleichungen auf Punkte außerhalb des Raumes $u = 0$ zu übertragen, führen wir jetzt statt der geradlinigen Koordinaten X, L die hyperbolischen Koordinaten R, φ ein:

$$X = R\cos\varphi, \quad L = R\sin\varphi \quad \ldots \quad (124)$$

[vgl. (70)]; dann ist

$$R^2 = X^2 + L^2, \quad tg\,\varphi = L/X \quad \ldots \quad (124\,a)$$

also φ ein imaginärer Winkel. Die entsprechende Transformation für Punkte der Weltlinie von de lautet:

$$x = \xi\cos\psi, \quad y = \eta\sin\psi \quad \ldots \quad (124\,b)$$

Es folgt daraus für die Koordinaten des Lichtpunktes L:

$$\frac{l_L}{x_L} = \frac{iu_L}{x_L} = i\beta_L = tg\,\psi_L.$$

Da in P die Richtungen der wachsenden X und R einerseits, die der wachsenden L und φ andererseits übereinstimmen, und da wegen $L = 0$ $R = X$ ist, so kann man die letzten Gleichungen für Φ schreiben:

$$\Phi_R = -\frac{de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_\varphi = \frac{de}{4\pi R}\,cotg\,\psi_L \quad (125)$$

ψ_L ist dabei der negativ imaginäre Winkel, um den man das Weltkoordinatensystem in der xu-Ebene drehen muß, damit statt des Aufpunktes P sein Lichtpunkt L mit O gleichzeitig wird.

Gehen wir jetzt durch eine Drehung um den imaginären Winkel $(-\varphi'')$ zu einem neuen System K'' über, so verändert R

seinen Wert nicht, während $\psi_L = (\psi_L' - \varphi'')$ wird. Auch bleiben die Richtungen der wachsenden R und φ in P dieselben, also gelten, bezogen auf K'' die Formeln:

$$\Phi_R = \frac{de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_\varphi = \frac{de}{4\pi R}\, cotg\,(\psi_L' - \varphi_L''),$$

wobei jetzt R, Y, Z und φ'' die Koordinaten des Aufpunktes sind. Angewandt auf das dem System K'' gleichberechtigte System K lauten sie:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_R &= \frac{-de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \\ \Phi_\varphi &= \frac{de}{4\pi R}\, cotg\,(\psi_L - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (125\,a)$$

und gelten in dieser Form für jeden beliebigen Aufpunkt, welcher mit O gleichzeitig gemacht werden kann. Analytisch ist $(\psi_L - \varphi)$ als Funktion der Lage des Aufpunktes (X, Y, Z, L) und der Konstanten der Hyperbelbewegung (ξ, η, ζ) durch die Bedingung gegeben, daß der Vektor $\Pi = \overrightarrow{PL}$ den absoluten Wert Null haben soll, d. h:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \Pi^2 &= (x_L - X)^2 + (y_L - Y)^2 + (z_L - Z)^2 \\ &\quad + (l_L - L)^2 \\ &= (y_L - Y)^2 + (z_L - Z)^2 + X^2 + L^2 \\ &\quad + x_L^2 + l_L^2 - 2\,(x_L X + l_L L) \\ &= (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 + R^2 + \xi^2 \\ &\quad - 2\,\xi R\, cos\,(\psi_L - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (126)$$

[vgl. (124), (124 a) und (124 b)]. Setzen wir zur Abkürzung

$$r^2 = (\xi - R)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 \quad \ldots (126\,a)$$

so finden wir, da $\psi_L - \varphi$ ebenso wie früher in (125) ψ_L negativ imaginär sein muß:

$$\left.\begin{aligned} cos\,(\psi_L - \varphi) &= \frac{r^2 + 2\,\xi R}{2\,\xi R} \\ sin\,(\psi_L - \varphi) &= \frac{-ir\sqrt{r^2 + 4\,\xi R}}{2\,\xi R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (126\,b)$$

Doch wollen wir diese Werte zunächst nicht einsetzen; dagegen bestätigen wir durch Differentiation an (126 b) die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial R} = \frac{\xi \cos(\psi_L - \varphi) - R}{\xi R \sin(\psi_L - \varphi)}, \quad \frac{\partial \psi_L}{\partial Y} = \frac{\eta - Y}{\xi R \sin(\psi_L - \varphi)} \qquad (126\,c)$$

e) Das elektromagnetische Feld bei der Hyperbelbewegung. Der zweite Schritt besteht in der Ableitung des Feldvektors $\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi$; auch hierbei benutzen wir als Koordinaten R, Y, Z, φ. Nach ihnen die Komponenten von $\mathfrak{M}$ zu bilden, ist deswegen berechtigt, weil man stets ein Achsenkreuz x, y, z, l den Richtungen der wachsenden R, Y, Z, φ parallel legen kann. (In diesem System wird P und O gleichzeitig.) Es wird dann nach (85):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{M}_{R\varphi} = \mathfrak{M}_{xl} = -i\mathfrak{E}_x, \quad && \mathfrak{M}_{y\varphi} = \mathfrak{M}_{yl} = -i\mathfrak{E}_y, \\ &\mathfrak{M}_{z\varphi} = \mathfrak{M}_{zl} = -i\mathfrak{E}_z, && \mathfrak{M}_{yz} = \mathfrak{H}_x, \\ &\mathfrak{M}_{zR} = \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{H}_y, && \mathfrak{M}_{Ry} = \mathfrak{M}_{xy} = \mathfrak{H}_z \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad (127)$$

Nach (74) und (75 a) ist aber:

$$\mathfrak{M}_{R\varphi} = \mathfrak{Rot}_{R\varphi}\,\Phi = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial R\Phi_\varphi}{\partial R} - \frac{\partial \Phi_R}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{R}\,\frac{\partial R\Phi_\varphi}{\delta R},$$

$$\mathfrak{M}_{y\varphi} = \mathfrak{Rot}_{y\varphi}\,\Phi = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial Y} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial \Phi_y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial Y},$$

$$\mathfrak{M}_{z\varphi} = \mathfrak{Rot}_{z\varphi}\,\Phi = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial Z} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial \Phi_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial Z},$$

die drei anderen Komponenten sind nach (75) und (75 a) Null, da nach (125 a) Φ_y und Φ_z verschwinden und Φ_R nur von R abhängt. Somit ist nach (127) und (126 c):

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{ide}{4\pi R \sin^2(\psi_L - \varphi)}\left(\frac{\partial \psi_L}{\partial R}\right)$$

$$= -\frac{ide\,[\xi \cos(\psi_L - \varphi) - R]}{4\pi \xi R^2 \sin^3(\psi_L - \varphi)},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{ide}{4\pi R \sin^2(\psi_L - \varphi)}\,\frac{\partial \psi_L}{\partial Y}$$

$$= -\frac{ide\,(\eta - Y)}{4\pi \xi R^2 \sin^3(\psi_L - \varphi)},$$

(Sommerfeld) oder wenn wir jetzt von den Substitutionen (126 b) Gebrauch machen:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{de}{\pi}\,\frac{\xi^2[r^2 - 2R(R-\xi)]}{r^3\sqrt{r^2+4\xi R}^3},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{2\,de}{\pi}\,\frac{\xi^2 R(\eta - Y)}{r^3\sqrt{r^2+4\xi R}^3}$$

($\mathfrak{E}_z$ entsprechend) (Born). Bezogen auf das System, in welchem der Aufpunkt mit dem Mittelpunkt O der Hyperbelbewegung gleichzeitig ist, ist also $\mathfrak{H} = 0$, während $\mathfrak{E}$ den hier angegebenen Wert hat. Wegen $L = 0$ ist dabei nach (124a) $R = X$.

f) Die Rückwirkung des Feldes auf das Elektron. ξ, η, ζ sind die Koordinaten des Punktes, welchen die Hyperbel (123b) mit dem Raume $u = 0$ irgend eines Bezugssystems K gemeinsam hat. Infolgedessen ist $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ ein Volumenelement in diesem Raume, und man kann in den Gleichungen für $\mathfrak{E}$

$$de = \varrho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \varrho\,dV$$

setzen. Läßt man dann ξ, η, ζ alle die Werte durchlaufen, welche innerhalb des vom Elektron zur Zeit $t = 0$ eingenommenen Volumens, bezogen auf K, liegen, so findet man durch Integration die Feldstärke, welche das ganze Elektron in einem Weltpunkt hervorruft, welcher mit O gleichzeitig ist, d. h. ebenfalls im Raume $u = 0$ liegt. Multiplizieren wir schließlich mit

$$\varrho(X,Y,Z)\,dX\,dY\,dZ = \bar{\varrho}\,d\bar{V}$$

und integrieren wiederum über das Volumen des Elektrons zur Zeit $t = 0$, so finden wir nach (IXa) wegen $\mathfrak{H} = 0$ für die Kraft $\mathfrak{R}$, welche das Elektron zur Zeit $t = 0$ auf sich selbst ausübt, die Gleichungen:

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{1}{\pi}\int\int \varrho\bar{\varrho}\,\frac{\xi^2[r^2 - 2X(X-\xi)]}{r^3\sqrt{r^2+4\xi X}^3}\,dV\,d\bar{V},$$

$$\mathfrak{R}_y = -\frac{2}{\pi}\int\int \varrho\bar{\varrho}\,\frac{\xi^2 X(\eta - Y)}{r^3\sqrt{r^2+4\xi X}^3}\,dV\,d\bar{V},$$

($\mathfrak{R}_z$ entsprechend). Dabei ist nach (126a)

$$r^2 = (\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2$$

das Quadrat des Abstandes der Volumenelemente dV und $d\bar{V}$.

Die Integration für $\mathfrak{R}_y$ führt nun notwendig zum Wert Null, da wir die X-Achse nach dem Obigen als Symmetrieachse der Form und Ladungsverteilung zu betrachten haben. Denn zu jedem Produkt $dV_1\, d\overline{V}_1$, welches den Werten ξ_1, η_1, ζ_1; X_1, Y_1, Z_1 entspricht, gibt es ein anderes, ihm gleiches, $dV_2\, d\overline{V}_2$, für welches

$$\xi_2 = \xi_1, \quad \zeta_2 = \zeta_1, \quad X_1 = X_2, \quad Z_1 = Z_2,$$

dagegen

$$(\eta_2 - Y_2) = -(\eta_1 - Y_1)$$

ist. Die zu integrierende Funktion hat für sie entgegengesetzt gleiche Werte, ihre Beiträge zum Integral heben sich daher auf.

Um die Integration für $\mathfrak{R}_x$ auszuführen, wollen wir statt der auf dem Mittelpunkt O der Hyperbelbewegung bezogenen Koordinaten ξ, η, ζ; X, Y, Z solche einführen, welche vom Mittelpunkte des Elektrons aus gemessen sind; dieser selbst möge im ersteren System die Koordinaten $\alpha, 0, 0$ haben. Die neuen Koordinaten sind dann:

$$\Xi = \xi - \alpha, \quad H = \eta, \quad Z = \zeta,$$
$$x = X - \alpha, \quad y = Y, \quad z = Z.$$

Nach (123a) hängt α auf das engste mit der Beschleunigung b des Mittelpunktes zusammen. Substituieren wir c^2/b für α, so finden wir:

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{1}{\pi}\iint \varrho\,\overline{\varrho}\,\frac{(c^2+\Xi b)^2[r^2 b + 2(c^2+x b)(\Xi - x)]}{r^3\sqrt{r^2 b^2 + 4(c^2+\Xi b)(c^2+x b)}^3}\, dV d\overline{V}.$$
$$r^2 = (\Xi - x)^2 + (H-y)^2 + (Z-z)^2.$$

Der Wert dieses Integrals ändert sich nicht, wenn man Ξ, H, Z mit x, y, z, vertauscht, weil beide Arten von Integrationsvariabeln dieselben Werte durchlaufen. Addieren wir zu dem angegebenen den durch die Vertauschung entstehenden Ausdruck, so finden wir nach leichten Umrechnungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_x = -\frac{b}{2\pi} \times \\ \iint \varrho\,\overline{\varrho}\,\frac{r^2[(c^2+\Xi b)^2 + (c^2+x b)^2] + 2(\Xi - x)^2(c^2+\Xi b)(c^2+x b)}{r^3\sqrt{r\, b^2 + 4(c^2+\Xi b)(c^2+x b)}^3}\, dV d\overline{V} \end{aligned}\right\} \quad (127a)$$

Dies gilt für den Moment $t = 0$, in welchem nach (123b) die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ den Wert Null hat.

g) Näherung für kleine Beschleunigung. Entwickeln wir $\mathfrak{K}_x$ nun nach steigenden Potenzen von b:

$$\mathfrak{K}_x = -b(M_0 + M_1 b + M_2 b^2 + \cdots),$$

so können wir die Koeffizienten M_n zwar nicht berechnen, solange nicht der Einfluß von b auf die Form des Elektrons und die Verteilung der Ladung bekannt ist. Wohl aber können wir aus Symmetriegründen folgern, daß alle M_n mit ungeradem Index n Null sind; denn bei einem bei Ruhe kugelförmigen Elektron kann $\mathfrak{K}_x$ nur sein Zeichen, nicht aber seinen absoluten Wert ändern, wenn b sein Zeichen umkehrt. Der Koeffizient M_0 ist aber der Wert des Multiplikators von b für $b = 0$; nach (127a) ist

$$M_0 = \frac{1}{8\pi c^2}\iint \frac{\varrho\,\bar{\varrho}}{r}\left(1 + \frac{(\Xi - x)^2}{r^2}\right) dV d\bar{V};$$

und zwar ist hier über die unveränderte Kugelgestalt zu integrieren. Wegen der Gleichwertigkeit der x-, y-, z-Richtung ist:

$$\iint \varrho\,\bar{\varrho}\,\frac{(\Xi - x)^2}{r^3}\, dV d\bar{V} = \iint \varrho\,\bar{\varrho}\,\frac{(H - y)^2}{r^3}\, dV d\bar{V}$$
$$= \iint \varrho\,\bar{\varrho}\,\frac{(Z - z)^2}{r^3}\, dV d\bar{V};$$

die Summe dieser drei gleichen Integrale ist aber $\iint \frac{\varrho\,\bar{\varrho}}{r}\, dV d\bar{V}$, so daß jedes den Wert $\frac{1}{3}\iint \frac{\varrho\,\bar{\varrho}}{r}\, dV d\bar{V}$ hat. $\frac{1}{8\pi}\iint \frac{\varrho\,\bar{\varrho}}{r}\, dV d\bar{V}$ ist nun bekanntlich die elektrostatische Energie E^0 des ruhenden Elektrons [wegen des Zahlenfaktors vgl. Anhang unter d)]. Somit wird

$$M_0 = \frac{4}{3c^2} E^0.$$

Ersetzen wir endlich b durch $|\dot{\mathfrak{q}}|$, so finden wir die bis auf Glieder mit $|\dot{\mathfrak{q}}|^3$ genaue Gleichung*):

*) Schon aus dimensionellen Gründen erkennt man, daß M_2/M_0 von der Größenordnung a^2/c^4 ist, wenn a den Radius des Elektrons bezeichnet. Solange b^2 klein gegen c^4/a^2 ist, ist somit das zweite Glied zu vernachlässigen. a ist nun sicher viel kleiner als die Molekülдimensionen, die rund gleich 10^{-8} cm sind. Also ist c^4/a^2 sicher sehr groß gegen $10^{57}\,\mathrm{cm^2\,sec^{-4}}$.

$$\mathfrak{K} = -\frac{4E^0}{3c^2}\dot{\mathfrak{q}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (128)$$

Durch die Bewegung längs der Krümmungshyperbel können wir nun nach c) eine beliebige Bewegung für eine kurze Strecke annähern. Daher können sie Gleichung (128) als Näherung für beliebige Bewegungen anwenden. Sie gilt zunächst für $\mathfrak{q} = 0$, d. h. bezogen auf das mitbewegte System, das jetzt wieder K^0 heißen möge. Transformieren wir die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_x^0 = -\frac{4}{3}\frac{E^0}{c^2}\dot{\mathfrak{q}}_x^0, \quad \mathfrak{K}_y^0 = -\frac{4}{3}\frac{E^0}{c^2}\dot{\mathfrak{q}}_y^0$$

gemäß (122a) und (87a) auf ein System K [die Bedingung für die Anwendbarkeit von (87a) ist hier streng erfüllt], so finden wir:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{4}{3}E^0\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}^3}\dot{\mathfrak{q}}_x, \quad \mathfrak{K}_y = -\frac{3c}{4}E^0\frac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{\sqrt{c^2-q^2}}$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{K} &= -\frac{4E^0}{3c\sqrt{c^2-q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{c^2-q^2}\right)\\ &= -\frac{4E^0}{3c\sqrt{c^2-q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{q}_x\dot{\mathfrak{q}}_x + \mathfrak{q}_y\dot{\mathfrak{q}}_y + \mathfrak{q}_z\dot{\mathfrak{q}}_z}{c^2-q^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad (128\,a)$$

Nach (113) ist aber der elektromagnetische Impuls des stationär bewegten Elektrons:

$$\mathfrak{G} = \frac{4E^0\mathfrak{q}}{3c\sqrt{c^2-q^2}} = \frac{4E^0\mathfrak{q}}{3c\sqrt{c^2-(\mathfrak{q}_x^2+\mathfrak{q}_y^2+\mathfrak{q}_z^2)}},$$

bei einer Änderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ somit:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{4E^0}{3c}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{q}}}{\sqrt{c^2-(\mathfrak{q}_x^2+\mathfrak{q}_y^2+\mathfrak{q}_z^2)}} + \mathfrak{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-(\mathfrak{q}_x^2+\mathfrak{q}_y^2+\mathfrak{q}_z^2)}}\right)\right\}$$
$$= \frac{4E^0}{3c\sqrt{c^2-q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{c^2-q^2}\right).$$

Also finden wir nach (128a) für die Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, die wichtige Beziehung:

$$\mathfrak{K} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (128\,b)$$

Erfährt ein Elektron Beschleunigung, so wird ein Teil der beschleunigenden Kraft durch die hier berechnete innere Kraft $\mathfrak{R}$ aufgehoben, d. h. zur Vergrößerung des elektromagnetischen Impulses verwandt, so daß nur der Rest zur Vergrößerung des etwaigen mechanischen Impulses übrig bleibt. Darin äußert sich die elektromagnetische Trägheit des Elektrons (§ 2). Dies ist nach dem Impulssatz selbstverständlich. Daß aber der Impuls $\mathfrak{G}$ unter Voraussetzung gleichförmiger Geschwindigkeit berechnet werden kann, beweist, daß die Bewegung innerhalb der hier erreichten Annäherung eine quasistationäre Bewegung ist.

Weil Gleichung (128b) für alle derartigen Bewegungen eine notwendige Konsequenz des Impulssatzes ist, so konnte Lorentz[5]) und vor ihm für das starre Elektron Abraham[6]) umgekehrt von dem Impuls auf die innere Kraft $\mathfrak{R}$ zurückschließen. Die genannten Autoren und ebenso Planck haben ferner die Annäherung noch weitergetrieben, indem sie zeigten, daß, bezogen auf das mitbewegte System, im allgemeinen noch ein Glied $\frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathfrak{q}}^0$ zu dem oben angegebenen hinzutritt. Dies hängt mit der Ausstrahlung zusammen, die von einem ungleichförmig bewegten Elektron ausgeht. Wir verweisen wegen des Näheren auf die Originalarbeiten *)[7]).

VI. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper.

§ 19. Die Transformation der Feldgleichungen I bis IV.

a) Die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. In § 5 führten wir aus, daß die Theorie die Möglichkeit fordert, von der Atomistik der Elektrodynamik durch Mittelwertbildung zu der Theorie der ponderablen Körper überzugehen, ohne daß dies befriedigend

*) Bei der Hyperbelbewegung ist die Zusatzkraft $\frac{e^2}{6\pi c^2}\ddot{\mathfrak{q}}^0$ nach (123) gleich Null — in Übereinstimmung mit (127a). In der Tat strahlt die zeitlich unbegrenzte Hyperbelbewegung nicht aus. Wohl aber geschieht dies, wenn zwei verschiedene Bewegungen mit gleichförmiger

durchgeführt wäre. Wir kündigten auch dort schon an, daß wir uns wegen dieser Schwierigkeit zur Ableitung der Feldgleichungen für bewegte ponderable Körper auf die Maxwellschen Gleichungen (I) bis (X) stützen würden, wie wenn sie eine neue Grundlage bildeten und nicht schon in der Elektronentheorie implizite, und zwar in vollkommenerer Form vorhanden wären. Immerhin können wir einige Anhaltspunkte aus den Erörterungen des § 14 entnehmen.

In einer Beziehung sind wir aber hier ganz anders gestellt wie in § 14. Dort wollten wir nachweisen, daß die Gleichungen für den leeren Raum in allen berechtigten Systemen dieselbe Form haben. Hier aber ist naturgemäß ein System, nämlich das mit der Materie bewegte, K^0, bevorzugt; nur für dieses kennen wir die Grundgleichungen, und es ist zu erwarten, daß sie für alle anderen Systeme eine andere, die Geschwindigkeit berücksichtigende Form annehmen. Unser Ziel muß sein, Gleichungen aufzustellen, welche einerseits gegen die Lorentz-Transformation invariant sind, andererseits im System K^0 mit der Maxwellschen Theorie identisch sind. Dann sind wir sicher, daß das Problem auf keine sachlich von der unsrigen verschiedene Weise gelöst werden kann. Um ihrer Invarianz sicher zu sein, fordern wir von den abzuleitenden Gleichungen, daß sie sich als Beziehungen zwischen Weltvektoren schreiben lassen.

Die Gegenüberstellung der Gleichungen

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & rot\,\mathfrak{E} = 1/c\,\dot{\mathfrak{B}}, & \text{(IV)} & div\,\mathfrak{B} = 0, \\ \text{(Ia)} & rot\,\mathfrak{E} = 1/c\,\dot{\mathfrak{H}}, & \text{(IVa)} & div\,\mathfrak{H} = 0, \end{array}$$

zeigt, daß in der Theorie der ponderablen Körper die magnetische Verschiebung $\mathfrak{B}$ dieselbe Rolle spielt, wie die Feldstärke $\mathfrak{H}$ beim leeren Raume. In der Tat geht auch bei der erwähnten Mittelwertbildung $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{B}$ über. Aus den Erörterungen von § 11 schließen wir daher, daß

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{M}_{xl} = -i\mathfrak{E}_x, & \mathfrak{M}_{yl} = -i\mathfrak{E}_y, & \mathfrak{M}_{zl} = -i\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{M}_{yz} = \mathfrak{B}_x, & \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{B}_y, & \mathfrak{M}_{xy} = \mathfrak{B}_z \end{array}\right\} \quad (129)$$

Geschwindigkeit durch ein Stück Hyperbelbewegung hindurch ineinander überführt werden [8]). Jene Zusatzkraft wirkt dabei während der beiden Zeitabschnitte, in denen die erste gleichförmige Bewegung in die Hyperbelbewegung und diese wieder in die zweite gleichförmige Bewegung übergehen.

die Komponenten eines Sechservektors sind, welchen wir auch hier als den Feldvektor $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Die Gleichungen (I) und (IV) kann man dann analog zu (XIV) zusammenfassen in:

$$\Delta i v \mathfrak{M}^* = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVII)}$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen (II) und (III)

$$rot \mathfrak{H} = 1/c\ (\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{I}), \quad div \mathfrak{D} = \varrho$$

tritt der elektrische Leitungsstrom $\mathfrak{I}$ und die Dichte ϱ der wahren, d. h. auf Ansammlung von Leitungselektronen beruhenden Ladung auf. Die elektrische Leitung beruht aber auf Konvektion der Elektronen, welche sich relativ zum Körper bewegen; hat dieser selbst Geschwindigkeit, so tritt neben den Leitungsstrom der Konvektionsstrom $\varrho\,\mathfrak{q}$ seiner Ladung ϱ. Wir wollen daher zunächst versuchsweise

$$rot \mathfrak{H} = 1/c\ (\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{I} + \varrho\,\mathfrak{q}) \quad \ldots\ldots \quad \text{(II b)}$$

setzen. Die Summe $\mathfrak{I} + \varrho\,\mathfrak{q}$ gibt dann den gesamten Strom an, soweit er von Leitungselektronen herrührt; es ist nach § 14 einleuchtend, daß man als die Komponenten des Viererstromes P hier die Größen

$$P_x = 1/c\ (\mathfrak{I}_x + \varrho\,\mathfrak{q}_x) \text{ usw.} \quad P_l = i\varrho \quad \ldots \quad (130)$$

zu betrachten hat. Schreiben wir nun die Gleichungen (II b) und (III) in die Form:

$$\begin{aligned}
+\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_x}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{I}_x + \varrho\,\mathfrak{q}_x),\\
-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_y}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{I}_y + \varrho\,\mathfrak{q}_y),\\
+\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_z}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{I}_z + \varrho\,\mathfrak{q}_z),\\
+\frac{\partial i\mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial i\mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial i\mathfrak{D}_z}{\partial z} &= i\varrho,
\end{aligned}$$

so schließen wir wie in § 14 aus der Vektoreigenschaft von P, daß die sechs Größen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{xl} &= -i\mathfrak{D}_x, & \mathfrak{B}_{yl} &= -i\mathfrak{D}_y, & \mathfrak{B}_{zl} &= -i\mathfrak{D}_z\\
\mathfrak{B}_{yz} &= \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{B}_{zx} &= \mathfrak{H}_y, & \mathfrak{B}_{xy} &= \mathfrak{H}_z
\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

die Komponenten eines Sechservektors, des Verschiebungsvektors $\mathfrak{B}$ bilden. Die fraglichen Gleichungen lassen sich dann in die Form

$$\mathit{div}\,\mathfrak{B} = P \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

zusammenfassen. Damit ist aber der Ansatz (IIb) bewiesen, denn er läßt sich mit (III) zu der vierdimensional-vektoriellen Beziehung (XVIII) zusammenfassen und geht im System K^0, d. h. für $\mathfrak{q} = 0$ in (II) über. Die Maxwellschen Gleichungen (I) bis (IV) gelten also unverändert auch für bewegte Körper, wenn man zum Leitungsstrom den Konvektionsstrom der wahren Ladungen additiv hinzufügt.

Für das Verhalten der Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ bei der speziellen Transformation (XI) gelten wegen (85), (129) und (131) Gleichungen, welche den Formeln (85 c) analog gebaut sind und aus den letzteren entstehen, wenn man dort entweder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{D}$ vertauscht.

b) Leitungs- und Konvektionsstrom. Ebenso einfach lassen sich die Transformationsformeln für den Gesamtstrom $\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q}$ aus dem Vektorcharakter von P herleiten. Eine genaue Überlegung ist aber erforderlich, um die Zerlegung in Leitungsstrom und Konvektionsstrom vorzunehmen. Der Viererstrom P hat hier nicht wie in § 14 die Richtung der Weltlinien der Materie; er hat vielmehr im mitbewegten System K^0 die räumlichen Komponenten $P_{x^0} = \mathfrak{J}^0_{x^0}$ usw. Wir zerlegen ihn in zwei neue Vierervektoren, die Viererkonvektion:

$$K = -(YP)\,Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

welche die Richtung der Weltlinie hat, und die Viererleitung:

$$A = P + (YP)\,Y \quad \ldots\ldots \quad (132\,a)$$

welche auf ihr senkrecht steht, weil vermöge $Y^2 = -1$

$$(YA) = (YP)(1 + Y^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (132\,b)$$

ist. Aus $K + A = P$ folgt nach (130):

$$\varrho = -iP_l = -i(K_l + A_l) \quad \ldots\ldots \quad (133)$$

Im mitbewegten System K^0 ist nun die l^0-Komponente von A nach (132b) Null, während $A_{x^0} = 1/c\,\mathfrak{J}^0_{x^0}$ usw. ist. Elektrische Raum-

dichte und Strom sind dort voneinander völlig unabhängig. In jedem anderen System aber liefert A einen Beitrag

$$\lambda = -iA_l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (134)$$

zur Dichte ϱ. Die „Leitungsdichte“ λ ist am einfachsten durch die Bedingung (132b) zu bestimmen; denn setzt man die Werte (134) und (134a) ein, so findet man:

$$\lambda = \frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{J})}{c^2 - q^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (134a)$$

Der Leitungsstrom an sich bedingt somit im bewegten Körper eine gewisse räumliche Ladung, auch wenn ϱ^0 verschwindet. Infolgedessen müssen wir auch den λ entsprechenden Teil $\lambda\mathfrak{q}$ des Konvektionsstromes mit dem Leitungsstrom zur Viererleitung zusammenfassen, indem wir

$$A_x = 1/c\,(\mathfrak{J}_x + \lambda \mathfrak{q}_x) \text{ usw.} \quad \ldots\ldots \quad (134b)$$

setzen. In der Tat folgten diese Werte für A_x usw. aus der Definition (132a) der Viererleitung, wenn man dort nach (51) Y auf $\mathfrak{q}$ und nach (130) P auf ϱ, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{q}$ zurückführt.

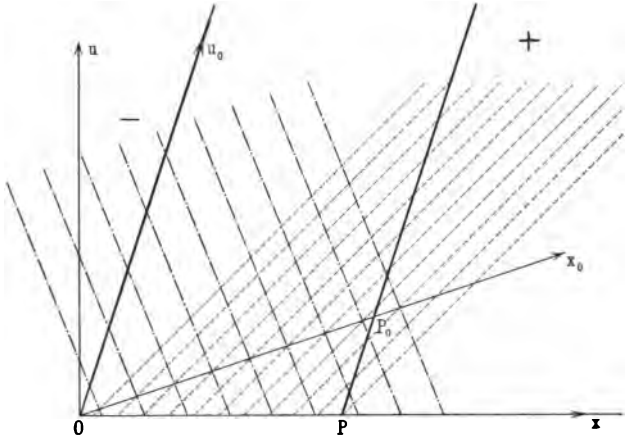
c) Die Invarianz der Elektrizitätsmenge. Dies alles klingt zunächst sehr paradox; denn eine Ladung tritt bei einem materiellen Volumelement dann auf, wenn es positive und negative Elektronen in verschiedener Zahl enthält. Die Ladung eines Elektrons ist nach § 14 für alle Systeme die gleiche, und es scheint zunächst, als ob auch die Zahl der Elektronen gleicher Art in einem Stück Materie von der Wahl des Bezugssystems unabhängig sein müßte. Der Fehler dieses Trugschlusses beruht darauf, daß man nach den Anzahlen der gleichzeitig in ihm vorhandenen Elektronen fragen muß, und der Begriff der Gleichzeitigkeit nach § 6 etwas Relatives ist.

Wir wollen uns dies geometrisch veranschaulichen. Es seien in Fig. 12 die einander parallelen Geraden OU_0 und PP_0 die Weltlinien, welche die Endpunkte eines im System K^0 ruhenden geraden Drahtes darstellen. OP_0 stellt seine Länge im System K^0 zur Zeit $t^0 = 0$ dar, OP hingegen seine Länge im System K zur Zeit $t = 0$. Durchfließt ihn ein stationärer Leitungsstrom, so bilden die Weltlinien der positiven Elektronen in ihm im allgemeinen einen kleineren Winkel mit der x-Achse als die Weltlinie PP_0, die der negativen Elektronen dagegen einen größeren, wie

dies in der Figur gezeichnet ist, oder umgekehrt*). Ist der Draht bezogen auf K^0 ohne Ladung, so schneiden gleich viel Weltlinien positiver und negativer Elektronen die Strecke OP_0, wie dies in der Figur gezeichnet ist. Die Anschauung lehrt, daß dann die Strecke OP mehr positive Weltlinien als negative schneidet (zehn positive gegen sechs negative in Fig. 12). Das betrachtete Volumelement trägt also im System K eine positive Ladung, in Übereinstimmung mit (134a), da $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{q}$ hier parallel sind.

Die Ladung eines stromdurchflossenen Stückes Materie ist also im allgemeinen keine Invariante der Lorentz-Transformation. Fragen wir nun nach der Ladung e eines vollständigen

Fig. 12.



Stromgebietes, d. h. eines materiellen Systems, dessen Begrenzung ganz in Nichtleitern verläuft. Aus (XVIII) folgt nach der Rechnungsregel (65):

$$Div\, P = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

[vgl. (84)] was nach (130) in die Beziehung

$$\dot{\varrho} + div\,(\varrho\,\mathfrak{q}) + div\,\mathfrak{J} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

*) Der Einfachheit halber sind die Weltlinien der Elektronen als parallele Gerade gezeichnet, obwohl die Annahme gleichförmiger Geschwindigkeit bei ihnen auch nicht annähernd zutrifft.

übergeht, welche sich als Verallgemeinerung der Kontinuitätsgleichung (17) darstellt. Nehmen wir an ihr die Umformung vor, welche von (17) zu (18) führt, so finden wir:

$$\frac{\delta(\varrho\, dV)}{\delta t} + div\, \mathfrak{J} = 0.$$

Und integrieren wir hier über ein beliebig großes materielles Raumstück, dessen Ladung $\int \varrho\, dV$ wir mit e bezeichnen, so erhalten wir nach dem Gaußschen Satz $\varkappa$:

$$\frac{de}{dt} = \int \mathfrak{J}_n\, d\sigma.$$

Die rechte Seite stellt die als Leitungsstrom pro Zeiteinheit durch die Oberfläche eintretende Elektrizitätsmenge dar; bei einem vollständigen Stromgebiet verschwindet sie. Dessen Gesamtladung ist somit in jedem berechtigten System, daher nach dem Anfang von § 14 auch bei einer Lorentz-Transformation unveränderlich.

Während die Ladung eines stromdurchflossenen Stückes Materie wegen des Auftretens der Leitungsdichte λ im allgemeinen von System zu System variiert, hat die Ladung eines vollständigen Stromgebietes in allen berechtigten Systemen den gleichen Wert*). Für nichtleitende Körper gilt der fundamentale Satz von der Invarianz der elektrischen Ladung ohne jede Einschränkung.

Historisch interessant ist vielleicht, daß der obige Wert (134a) für die Leitungsdichte schon 1895 von H. A. Lorentz abgeleitet wurde, und zwar aus der Vorstellung heraus, daß die Bewegung des Stromes in seinem eigenen Magnetfelde eine Kraft $1/c\,[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]$ [vgl. (IXa)] auf die Elektronen hervorruft, welche sie zu einer Ladung von dieser Dichte zusammentreibt. Selbstverständlich

*) Man darf aber hieraus nicht schließen, daß das Integral $\int \lambda\, dV$, erstreckt über ein vollständiges Stromgebiet, stets Null wäre. Das leicht auszuführende Beispiel eines unendlich langen, leitenden Stabes, welcher sich in seiner Längsrichtung unter einem positiv oder negativ geladenen Nichtleiter fortbewegt, zeigt sogleich, daß der Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ überall in einem Stromgebiete die der Geschwindigkeit entgegengesetzte Richtung haben, und daß infolgedessen nach (134a) $\int \lambda\, dV < 0$ sein kann. Trotzdem behält aber der obige Satz seine Richtigkeit.

kann die Relativitätstheorie diese Deutung ohne weiteres übernehmen; sie veranschaulicht auch den Satz, daß die Ladung eines vollständigen Stromgebietes durch die Bewegung nicht verändert wird; denn die erwähnte Kraft kann wohl die Verteilung der Elektronen über das Stromgebiet verändern, nicht aber ihre Gesamtzahl in diesem.

Blicken wir auf diesen Paragraphen zurück, so sehen wir, daß die Feldgleichungen (I) bis (IV) durch die Geschwindigkeit der Körper fast gar nicht verändert werden; nur der Konvektionsstrom tritt mit dem Werte, der vom Rowlandschen Versuche (§ 2) gefordert wird, hinzu. Es hat dies seinen Grund darin, daß sie aus den atomistischen Feldgleichungen hervorgehen, indem man die Unterscheidung von Leitungs- und in den Atomen gebundenen Elektronen einführt und den Viererstrom P nur auf die ersteren zurückführt. Der Unterschied zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ sowie $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ ergibt sich dann als Folge der Existenz von Polarisations- und Magnetisierungselektronen. Die Natur der Kräfte zwischen Atomen und Elektronen kommt dabei noch gar nicht in Betracht. Deshalb gelten die fraglichen Gleichungen jedenfalls in viel weiterem Umfange als die hier gegebene Ableitung, welche sich wegen des Relativitätsprinzips genau genommen nur auf gleichförmige Bewegung und wegen der Maxwellschen Theorie nur auf nicht-dispergierende Körper bezieht. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß sie streng allgemeingültig sind.

§ 20. Die Transformation der Gleichungen (V) bis (VII).

a) Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. Ganz anders stehen die Gleichungen (V) bis (VII) zur Atomistik; bei ihrer Ableitung kommen gerade die Kräfte zwischen Atomen und Elektronen wesentlich in Betracht und damit treten die ganzen in § 5 erwähnten Schwierigkeiten auf. Wir behandeln sie hier in der folgerichtigen Durchführung des oben skizzierten Standpunktes als etwas für ruhende Körper Gegebenes und suchen ihre Übertragung auf bewegte Medien.

Wir führen zu diesem Zweck zunächst vier neue Raumvektoren ein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}^* &= \mathfrak{E} + 1/c\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}] \\ \mathfrak{H}^* &= \mathfrak{H} - 1/c\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{D}] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (137)$$

die wir als die „elektromotorische“ und „magnetomotorische Kraft“ bezeichnen, sowie

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}^* &= \mathfrak{D} + 1/c\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]\\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - 1/c\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}]\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (137\,a)$$

Betrachten wir sodann die vier Vektorprodukte aus der Vierergeschwindigkeit Y und den Sechservektoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{B}^*$. In einem beliebigen System K haben die Komponenten von $[Y\mathfrak{M}]$ nach (51), (58) und (129) die Werte:

$$\left.\begin{aligned}[Y\mathfrak{M}]_x &= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left\{\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{q}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{q}_z\mathfrak{B}_y)\right\}\\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}]\right\}_x = \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{E}^*_x \text{ usw.}\\ [Y\mathfrak{M}]_l &= i\frac{(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E})}{\sqrt{c^2-q^2}} = i\frac{(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}\end{aligned}\right\} \cdot \quad (138)$$

Analog stellen die drei anderen Produkte

$$[Y\mathfrak{B}], \quad [Y\mathfrak{M}^*], \quad [Y\mathfrak{B}^*],$$

nach (131) und (54) in ihren räumlichen Komponenten die Raumvektoren

$$\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{D}^*, \quad \frac{ic}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{B}^*, \quad \frac{ic}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{H}^* \quad \cdots \quad (138\,a)$$

dar, während ihre l-Komponenten gleich

$$i\frac{(\mathfrak{q}\,\mathfrak{D}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad \frac{-(\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad \frac{-(\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}} \quad \cdots \quad (138\,b)$$

sind. Im mitbewegten System K^0 gehen die vier genannten Raumvektoren über in $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{D}^0$, $\mathfrak{B}^0$, $\mathfrak{H}^0$, während die skalaren Produkte $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E})$ usw. verschwinden; da ferner nach (V) und (VI)

$$\mathfrak{D}^0 = \varepsilon\,\mathfrak{E}^0, \quad \mathfrak{B}^0 = \mu\,\mathfrak{H}^0$$

ist, so bestehen zwischen den Vektorprodukten die Beziehungen:

$$[Y\mathfrak{B}] = \varepsilon\,[Y\mathfrak{M}] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{XIX})$$

$$[Y\mathfrak{M}^*] = \mu\,[Y\mathfrak{B}^*] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{XX})$$

Wendet man sie auf die räumlichen Komponenten in irgend einem anderen System an, so findet man:

$$\mathfrak{D}^* = \varepsilon \mathfrak{E}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXI)}$$

$$\mathfrak{B}^* = \mu \mathfrak{H}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXII)}$$

Ihre Anwendung auf die l-Komponenten liefert nichts Neues. Es liegt dies daran, daß jedes der vier Vektorprodukte notwendigerweise auf der Vierergeschwindigkeit Y senkrecht steht, so daß die vierte Komponente durch die drei anderen mitbestimmt ist.

Für $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ geht aus (XXI) und (XXII) $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, d. h. $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ hervor. Ein Körper mit diesen Werten der Konstanten ε und μ unterscheidet sich daher auch in der Bewegung für elektromagnetische Vorgänge höchstens durch die Leitfähigkeit vom leeren Raum.

b) Elektromotorische Kraft und Leitungsstrom. Die Gleichung (VII): $\mathfrak{I}^0 = \sigma \mathfrak{E}^0$ läßt sich nach (138) und (134b) als

$$P + (YP)\,Y = A = \sigma/c\,[Y\mathfrak{M}] \quad \ldots \quad \text{(XXIII)}$$

schreiben; angewandt auf ihre räumlichen Komponenten in einem beliebigen System zeigt sie nach (134a) und (b), daß

$$\mathfrak{I} + \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{I})}{c^2 - q^2} = \frac{\sigma c \mathfrak{E}^*}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \ldots\ldots \quad (139)$$

ist. In Übereinstimmung hiermit sagt ihre l-Komponente aus:

$$\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{I})}{c^2 - q^2} = \frac{\sigma}{c}\,\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E})}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{\sigma}{c}\,\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Multipliziert man hier mit $\mathfrak{q}$ und subtrahiert von (139), so findet man als Verallgemeinerung von Gleichung (VII):

$$\mathfrak{I} = \frac{\sigma c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{c^2} \right) \quad \ldots \quad \text{(XXIV)}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (I) bis (IV) können die Formeln (XIX) bis (XXIV) strenge Gültigkeit sicherlich nur für den Fall beanspruchen, daß die Geschwindigkeit weder räumlich noch zeitlich variiert, angenäherte auch dann, wenn diese Variationen geringe Beträge aufweisen. Als Hinweis darauf, wo ihre Gültigkeitsgrenze liegt, mag das Beispiel eines gleichförmig rotierenden Körpers betrachtet werden. Bei ihm strebt sich jeder Teil wegen der Lorentz-Kontraktion im Verhältnis $\sqrt{1 - q^2/c^2}$

zusammenzuziehen, kann dies aber nicht, so lange nicht der Zusammenhang zwischen den Teilen des Körpers unterbrochen wird. Infolgedessen treten elastische Spannungen im Körper auf, welche ihn anisotrop und inhomogen machen. Die genannten Gleichungen gelten aber ebenso wie (V), (VI) und (VII) nur für isotrope, homogene Körper. Doch sind diese Einflüsse wie die Lorentz-Kontraktion selbst von der zweiten Ordnung in q/c; als erste, für die Diskussion aller Versuche aber völlig ausreichende Näherung können wir die in Rede stehenden Beziehungen daher auch auf rotierende Körper anwenden.

Die Grundgleichungen der in den beiden letzten Paragraphen entwickelten Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper stellen wir hier noch einmal zusammen. Sie lauten in vierdimensionaler Vektorform:

$$\text{(XVII)}\quad \mathcal{A}iv\,\mathfrak{M}^* = 0, \qquad \text{(XVIII)}\quad \mathcal{A}iv\,\mathfrak{B} = P,$$

$$\text{(XIX)}\quad [Y\mathfrak{B}] = \varepsilon\,[Y\mathfrak{M}], \qquad \text{(XX)}\quad [Y\mathfrak{M}^*] = \mu\,[Y\mathfrak{B}^*],$$

$$\text{(XXIII)}\quad P + (YP)\,Y = \sigma/c\,[Y\mathfrak{M}].$$

Gleichbedeutend sind damit die folgenden:

$$\text{(I)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -1/c\,\dot{\mathfrak{B}}, \qquad \text{(II b)}\quad rot\,\mathfrak{H} = 1/c\,(\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{I} + \varrho\,\mathfrak{q}),$$

$$\text{(IV)}\quad div\,\mathfrak{B} = 0, \qquad \text{(III)}\quad div\,\mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(XXI)}\quad \mathfrak{D}^* = \varepsilon\,\mathfrak{E}^*, \qquad \text{(XXII)}\quad \mathfrak{B}^* = \mu\,\mathfrak{H}^*,$$

$$\text{(XXIV)}\quad \mathfrak{I} = \frac{\sigma c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*)}{c^2}\right).$$

§ 21. Anwendungen.

a) Das Ohmsche Gesetz. Wie in der Elektrodynamik der ruhenden Körper folgt aus (XXIV) für stationäre und quasistationäre Ströme das Ohmsche Gesetz: „Widerstand × Stromstärke gleich Spannungsdifferenz", wenn man für die letztere das Linienintegral

$$\int\left[\mathfrak{E}_s^* - \mathfrak{q}_s\left(\frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*}{c^2}\right)\right] ds$$

nimmt. Der Widerstand ist dabei gleich

$$\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\int\frac{ds}{\sigma\,Q},$$

wenn Q den Querschnitt des Leiters bezeichnet; er hängt wegen der Lorentz-Kontraktion in Gliedern zweiter Ordnung auf ziemlich komplizierte Art von der Richtung der Geschwindigkeit gegen ds ab. Vernachlässigt man q^2/c^2 gegen 1, so wird die Spannungsdifferenz $\int \mathfrak{E}_s^* ds$ und der Widerstand erhält denselben Wert wie bei Ruhe.

b) Induktion. Aus (I), (137), α, σ' und (IV) folgt:

$$rot\,\mathfrak{E}^* = -1/c\,\{\dot{\mathfrak{B}} + rot\,[\mathfrak{B}\mathfrak{q}]\} = -1/c\,\underline{\dot{\mathfrak{B}}} \quad . \quad . \quad (140)$$

oder nach σ und dem Stokesschen Satz λ und (IV):

$$\int_O \mathfrak{E}_s^* ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140\,a)$$

d. h. das Linienintegral der elektromotorischen Kraft ist durch die Änderung des magnetischen Induktionsflusses durch die umschlungene mitbewegte Fläche bestimmt. Die übliche Berechnung der induzierten Stromstärke aus diesem Integral und dem Widerstand ist freilich nach a) nur eine Annäherung, aber eine für die Diskussion der Induktionsversuche mehr wie ausreichende. Die Theorie steht daher mit den Induktionsversuchen (§ 2) im Einklang.

Ganz analog findet man nach (IIb), (III) und (137):

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathfrak{H}^* &= 1/c\,\{\dot{\mathfrak{D}} + rot\,[\mathfrak{D}\mathfrak{q}] + \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} + \mathfrak{J}\} = 1/c\,(\underline{\dot{\mathfrak{D}}} + \mathfrak{J}) \\ \int_O \mathfrak{H}_s^* ds &= \frac{1}{c}\left\{\int \mathfrak{J}_n d\sigma + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n d\sigma\right\} \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Auch hier ist die umschlungene Fläche als mit der Materie bewegt gedacht.

c) Grenzbedingungen[1]). In der Maxwellschen Theorie sind, wie schon in § 4 erwähnt, an den Grenzflächen der Körper stetig: 1. die zur Grenze normalen Komponenten der Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$; nur wenn die wahre Ladung eine Flächendichte ϱ_σ hat, ist*)

$$\mathfrak{D}_{n_1} + \mathfrak{D}_{n_2} = \varrho_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

*) n_1 und n_2 sind die beiden von der Grenze fortweisenden Normalen; sie haben also entgegengesetzte Richtungen.

2. die tangentiellen Komponenten der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Diese beiden Bedingungen sind aber voneinander nicht unabhängig, vielmehr genügen die zweiten allein, um zusammen mit den Differentialgleichungen das Feld vollständig zu bestimmen; die ersteren werden dabei von selbst erfüllt. Wenn wir sie jetzt auf bewegte Körper übertragen, so setzen wir, falls zwei ponderable Körper aneinanderstoßen, voraus, daß ihre Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Grenzfläche denselben Wert hat; denn nur in diesem Falle können wir auf Ruhe transformieren und das Relativitätsprinzip samt den aus ihm abgeleiteten Differentialgleichungen anwenden. Diese Einschränkung fällt um so weniger ins Gewicht, als ein Gleiten zweier Körper aneinander wahrscheinlich in der Natur überhaupt nicht vorkommt. In denjenigen Fällen aber, in denen wir, um ein Problem einfach formulieren zu können, von einem Gleiten sprechen, wollen wir die Körper durch eine leere Schicht getrennt denken, welche so dünn ist, daß das elektromagnetische Feld sich nicht merklich ändert, wenn man sie senkrecht durchschreitet. Für die beiderseitigen Begrenzungen dieser Schicht kann man die abzuleitenden Stetigkeitsbedingungen anwenden und so auch die elektromagnetischen Felder in den Körpern miteinander in Beziehung setzen.

Wir zeigen zuerst, daß die Grenzbedingungen unter 1. unverändert übertragen werden können. Wendet man nämlich auf einen unendlich kleinen, unendlich flachen Zylinder, dessen Grundflächen $d\sigma_g$ der Grenze parallel und zu ihren beiden Seiten liegen, nach $\varkappa$ die Gleichung

$$\int div\, \mathfrak{D}\, d\tau = -\int \mathfrak{D}_n\, d\sigma$$

an, so kann man rechts die vom Zylindermantel herrührenden Teile des Integrals vernachlässigen und findet:

$$\int div\, \mathfrak{D}\, d\tau = (\mathfrak{D}_{n_1} + \mathfrak{D}_{n_2})\, d\sigma_g;$$

die linke Seite stellt aber nach (III) die gesamte Ladung des Zylinders dar und wird, wenn man den Zylinder flacher und flacher werden läßt, schließlich gleich $\varrho_\sigma\, d\sigma_g$; daraus folgt dann Gleichung (142). Ganz analog gilt wegen (IV):

$$\mathfrak{B}_{n_1} + \mathfrak{B}_{n_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

Die normalen Komponenten der Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ sind stetig (wenn keine wahre Flächenladung vorhanden ist).

Die Bedingungen unter 2. dagegen müssen bei bewegten Körpern abgeändert werden. Wir wenden die Gleichung (140a) auf ein infinitesimal, schmales, mit der Materie bewegtes Rechteck an, dessen kurze Seiten dN_1 und dN_2 die Grenzfläche senkrecht schneiden, während die langen Seiten ds_1 und ds_2 zu ihr parallel sind. So finden wir:

$$\int_{\bigcirc} \mathfrak{E}_s^* ds = (\mathfrak{E}_{s_1}^* - \mathfrak{E}_{s_2}^*)\, ds + (\mathfrak{E}_{N_1}^* - \mathfrak{E}_{N_2}^*)\, dN$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{B}_n\, ds\, dN\right),$$

wo n die Normale des Rechtecks bedeutet. Auf dem mitbewegten Flächenstück $ds\,dN$ ist nun $\mathfrak{B}_n$ eine stetig veränderliche Funktion der Zeit, desgleichen die Größe des Flächenelementes und auch das Produkt $\mathfrak{B}_n\, ds\, dN$*). Beim Grenzübergang zu $dN = 0$ folgt deshalb:

$$\mathfrak{E}_{s_1}^* = \mathfrak{E}_{s_2}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Analog schließen wir aus (141):

$$\mathfrak{H}_{s_1}^* = \mathfrak{H}_{s_2}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Die Seiten ds_1 und ds_2 können nun jede Richtung parallel zur Grenzfläche haben. Die tangentiellen Komponenten der elektromotorischen und magnetomotorischen Kraft sind daher stetig.

Bei Anwendung dieses Satzes auf die Grenze eines Körpers gegen den leeren Raum hat man für q auf beiden Seiten die Geschwindigkeit des Körpers zu setzen; denn auch die im leeren Raum gelegene Hälfte des Rechteckes $ds\,dN$, über welches wir integrierten, hat diese Geschwindigkeit.

d) Der Wilsonsche Versuch[2]). (Vgl. § 2 und 4.) Wir nehmen das Dielektrikum als gleichförmig bewegt an; die Übertragung auf den wirklichen Fall der gleichförmigen Rotation ist nach § 20 eine erste, aber zur Diskussion des Versuches völlig

*) Für einen ruhenden Punkt kann $\mathfrak{B}$ unstetig wechseln, wenn gerade eine Grenzfläche über ihn hinwegstreicht; deswegen wäre es falsch, aus (I) die Stetigkeit der tangentiellen Komponente von $\mathfrak{E}$ zu folgern.

ausreichende Näherung. Ferner denken wir uns das Dielektrikum als eine nach zwei Dimensionen (der x- und y-Richtung) unendlich ausgedehnte Scheibe von der Dicke l. Ebenso sollen die Platten des Kondensators unendlich ausgedehnt sein und von den Grenzflächen des Dielektrikums beiderseits durch leere Schichten von der Dicke a getrennt sein. Wie in § 4 soll die Geschwindigkeit der dielektrischen Scheibe in der x-Richtung, das magnetische Feld im Außenraum in der y-Richtung liegen.

Es ist von vornherein wahrscheinlich, daß sich unter diesen Annahmen ein stationärer Zustand einstellt. Bestätigt wird diese Vermutung durch das aus ihr abgeleitete Ergebnis, das allen Feldgleichungen und Grenzbedingungen genügt. Da dann die Differentialquotienten $\partial/\partial t$ Null sind, muß nach (I) $rot\,\mathfrak{E}$, also nach $\lambda\int \mathfrak{E}_s ds$ für jeden geschlossenen Weg verschwinden. Ist dies Integral für einen Weg, welcher von der Platte P_1 außen um die dielektrische Scheibe herum nach P_2 führt, gleich E, liegt also die Spannung E am Kondensator, so muß es für jeden durch die Scheibe von P_1 nach P_2 führenden Weg ebenfalls diesen Wert haben, also:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_z dz = E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (146)$$

Wir genügen allen Differentialgleichungen, wenn wir überall zwischen den Platten das elektromagnetische Feld nicht nur als zeitlich, sondern auch als räumlich konstant, ferner die elektrische Feldstärke überall parallel zu z, die magnetische parallel y ansetzen. Wir haben aber das Feld in den beiden leeren Schichten zu unterscheiden von dem in der bewegten Scheibe; es geschieht dies durch die Indices a und l. Nach (XXI) und (XXII) ist dann in den leeren Schichten:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{E}_z^a, \quad \mathfrak{B}_y^a = \mathfrak{H}_y^a$$

und im Innern der Platte:

$$\mathfrak{D}_z^l + q/c\ \mathfrak{H}_y^l = \varepsilon\ (\mathfrak{E}_z^l + q/c\ \mathfrak{B}_y^l),$$
$$\mathfrak{B}_y^l + q/c\ \mathfrak{E}_z^l = \mu\ (\mathfrak{H}_y^l + q/c\ \mathfrak{D}_z^l).$$

Nach den Grenzbedingungen ist die normale Komponente der elektrischen Verschiebung stetig, also:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{D}_z^l;$$

desgleichen die tangentielle Komponente der magnetomotorischen Kraft, daher:

$$\mathfrak{H}_y^a + q/c\, \mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{H}_y^l + q/c\, \mathfrak{D}_z^l.$$

Die tangentielle Komponente der elektromotorischen Kraft ist ebenso wie die normale der Verschiebung $\mathfrak{B}$ nach dem obigen Ansatz auf beiden Seiten der Grenzflächen Null. Schließlich ist noch nach (146):

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_z\, dz = a\, \mathfrak{E}_z^a + l\, \mathfrak{E}_z^l = E.$$

Die Spannungsdifferenz E und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}_y^a$ sind experimentell gegebene Daten. Zur Bestimmung der sieben Unbekannten $\mathfrak{E}_z^a$, $\mathfrak{E}_z^l$, $\mathfrak{D}_z^a$, $\mathfrak{D}_z^l$, $\mathfrak{H}_y^l$, $\mathfrak{B}_y^a$ und $\mathfrak{B}_y^l$ stehen die sieben vorstehenden linearen Gleichungen zur Verfügung. Von ihren Lösungen führen wir nur an:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{D}_z^l = \mathfrak{E}_z^a = \frac{\varepsilon(c^2 - q^2) E + qc(\varepsilon\mu - 1) l \mathfrak{H}_y^a}{\varepsilon(c^2 - q^2) a + (c^2 - \varepsilon\mu q^2) l}.$$

Da im Innern der Platten P_1 und P_2 das elektrische Feld Null ist, so mißt $|\mathfrak{D}_z^a|$ nach (142) die Dichte der Flächenladung auf ihnen.

Beim Wilsonschen Versuch war $E = 0$, ferner $\mu = 1$, außerdem war a sehr klein gegen l und q^2 gegen c^2 zu vernachlässigen. Man findet aus der letzten Gleichung als Dichte der Ladung für diesen Fall:

$$\pm(\varepsilon - 1)\, q/c\, |\mathfrak{H}^a|,$$

in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis.

Auffallend ist an dem streng gültigen Resultat, daß für eine bestimmte Unterlichtgeschwindigkeit q der Nenner, die Determinante unseres Gleichungensystems, verschwindet; es versagt in diesem Falle der obige unter Annahme stationären Zustandes aufgestellte Ansatz. Es hängt dies damit zusammen, daß die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung nach der Maxwellschen Theorie mit der Unterlichtgeschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ vor sich geht, und die von uns vernachlässigten, vom Rande der Scheibe ausgehenden Störungen deswegen bei der fraglichen Geschwindigkeit niemals abklingen. Jene Folgerung aus der Maxwellschen Theorie wird

aber, wie wir schon in § 7 erwähnten, von der Elektronentheorie nicht bestätigt. Sie erkennt $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ nur als Phasengeschwindigkeit bei periodischen Vorgängen, nicht als Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen an, so daß man füglich bezweifeln kann, daß man sich bei diesem Schluß noch im Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Theorie befindet.

e) Der Eichenwaldsche Versuch[3]). Für die Beschreibung des magnetischen Feldes hat man im allgemeinen die Wahl zwischen den Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$; im leeren Raum, in welchem die Beobachtung beim Eichenwaldschen Versuch erfolgt, werden aber beide miteinander identisch. Aus (XXII) folgt nun für unmagnetische Körper ($\mu = 1$)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - 1/c\,[\mathfrak{q}\,(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})]$$

und daraus nach (IIb):

$$rot\,\mathfrak{B} = 1/c\,\{\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J} + \varrho\,\mathfrak{q} + rot\,[(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}), \mathfrak{q}]\}.$$

Da nach (IV) $div\,\mathfrak{B} = 0$, und jeder Raumvektor durch seinen Rotor und seine Divergenz eindeutig bestimmt ist, so kennt man das magnetische Feld vollkommen, wenn außer dem Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$, dem Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und dem Konvektionsstrom $\varrho\,\mathfrak{q}$ noch der Röntgenstrom $rot\,[\mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \mathfrak{q}]$ gegeben sind. Da man nach (XXI) in erster Näherung hier $\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$ setzen kann, so hat der Röntgenstrom die Dichte

$$(\varepsilon - 1)\,rot\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{q}],$$

bei Eichenwalds Anordnung daher (vgl. § 4 d) eine Flächendichte vom Betrage $(\varepsilon - 1)\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{q}$, in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis.

f) Der Fresnelsche Mitführungskoeffizient[4]). Für die Optik der ponderablen, ruhenden Körper haben wir nach § 5 $\mu = 1$ und für ε das Quadrat des Brechungsindex n zu setzen. Die Gleichungen (15) für eine ebene Welle, bezogen auf das mitbewegte System K^0 lauten deshalb:

$$\frac{\mathfrak{E}^0}{\mathfrak{E}_0^0} = \frac{\mathfrak{H}^0}{\mathfrak{H}_0^0} = \frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{D}_0^0} = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_0^0} = sin\,\Theta.$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta = 2\pi\nu^0 \times \\ \left\{t^0 - n\,c\left(x^0\,cos\,\vartheta^0 + sin\,\vartheta^0\,(y^0\,cos\,\varphi^0 + z^0\,sin\,\varphi^0)\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (147)$$

wo analog zu (103a) gesetzt ist:

$$\cos(\mathfrak{S}^0 x^0) = \cos\vartheta^0, \quad \cos(\mathfrak{S}^0 y^0) = \sin\vartheta^0 \cos\varphi^0,$$
$$\cos(\mathfrak{S}^0 z^0) = \sin\vartheta^0 \sin\varphi.$$

Nach (129) und (131) drückt sich dasselbe in den Beziehungen aus:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \sin\Theta.$$

Man sieht an der letzteren Form wie bei der Theorie der Aberration in § 16a, daß Θ für alle berechtigten Bezugssysteme denselben Wert haben muß. Im Gegensatz zu dort sind hier aber nicht alle diese Systeme gleichwertig, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phasen V ist vielmehr nur für das System K^0 gegeben, für alle anderen erst zu bestimmen. Wir setzen daher für ein anderes System K:

$$\Theta = 2\pi\nu\left\{t - 1/V\left(x\cos\vartheta + \sin\vartheta\,(y\cos\varphi + z\sin\varphi)\right)\right\}.$$

Führen wir nun die spezielle Transformation (XI) aus, indem wir unser System K^0 mit dem dort eingeführten K' identifizieren, so finden wir aus (147):

$$\Theta = 2\pi\nu^0 \frac{c + q\,n\cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}} \times$$
$$\left\{t - \frac{(q + c\,n\cos\vartheta^0)\,x + n\sin\vartheta^0\sqrt{c^2 - q^2}\,(y\cos\varphi^0 + z\sin\varphi^0)}{c\,(c + q\,n\cos\vartheta^0)}\right\}$$

Durch Vergleich der beiden Formen von Θ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \varphi^0, \quad tg\,\vartheta &= \frac{n\sin\vartheta^0\sqrt{c^2 - q^2}}{q + c\,n\cos\vartheta^0}, \\ \nu &= \nu^0 \frac{c + q\,n\cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \\ V &= c\,\frac{c + q\,n\cos\vartheta^0}{\sqrt{(q + c\,n\cos\vartheta^0)^2 + n^2\,(c^2 - q^2)\sin^2\vartheta^0}} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (148)$$

Beim Fizeauschen Interferenzversuch fällt die Wellennormale in die Richtung der Geschwindigkeit oder die ihr entgegengesetzte, so daß $\vartheta^0 = 0$ oder $= \pi$, und

$$V = c\,\frac{c \pm nq}{cn \pm q} = \frac{c}{n} \pm q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \cdots \quad \cdot \quad (148a)$$

wird. In erster Näherung tritt also die Geschwindigkeit des Körpers multipliziert mit dem Fresnelschen Mit-

führungskoeffizienten $1 - 1/n^2$ zur Phasengeschwindigkeit c/n additiv hinzu, wie es der experimentelle Befund verlangt.

Um den früher angekündigten Zusammenhang mit dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeit zu erkennen, hat man nach der Geschwindigkeit des Strahles im bewegten Körper zu fragen. Beim ruhenden Körper ist bekannt, daß ein zylindrischer Ausschnitt aus einer ebenen Welle, wenn der Zylindermantel von Strahlen gebildet ist, sich unverändert in der Strahlrichtung fortpflanzt, und zwar gilt dies mit jeder beliebigen Annäherung, wenn wir die Grundfläche des Zylinders gegen die Lichtwellenlänge hinreichend groß wählen. Ein materieller Punkt, welcher sich dauernd in diesem Zylinder befinden soll, muß daher Strahlgeschwindigkeit haben. Die Tatsache, daß er dauernd beleuchtet wird, gilt nun aber für alle Bezugssysteme. Daher muß sich die Strahlgeschwindigkeit wie die eines materiellen Punktes transformieren. Im System K^0 hat sie nach der Maxwellschen Theorie den Wert c/n. Nach dem Additionstheorem (Gleich. 25e) hat sie mithin im System K den Betrag:

$$w = c\,\frac{\sqrt{c^2 + n^2 q^2 + 2\,q\,c\,n\,\cos\vartheta^0 - q^2\,\sin^0\vartheta^0}}{c\,n + q\,\cos\vartheta^0},$$

während die Neigung ϑ des Strahles gegen die Richtung der Geschwindigkeit durch die aus (25a) folgende Gleichung

$$tg\,\vartheta = \frac{\sin\vartheta^0\,\sqrt{c^2 - q^2}}{c\cos\vartheta^0 + nq}$$

bestimmt ist. Strahl und Wellennormale haben daher im bewegten Körper im allgemeinen verschiedene Richtung und Geschwindigkeit. Die Unterschiede müssen aber aus Symmetriegründen fortfallen, wenn wie beim Fizeauschen Versuch $\vartheta_0 = 0$ oder $= \pi$ ist. Dann wird in der Tat in Übereinstimmung mit (148a)

$$w = c\,\frac{c \pm nq}{nc \pm q} = \frac{c}{n} \pm q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \cdots$$

Wir haben hiermit die Erklärung aller in § 2 genannten Erfahrungstatsachen über die Elektrodynamik der bewegten Körper mit alleiniger Ausnahme der Dynamik des Elektrons gegeben.

Das Fehlschlagen aller Versuche, auf der Erde einen Einfluß der Erdbewegung nachzuweisen, erklärt das Relativitätsprinzip an sich. Zur Deutung der Aberration, des Dopplerschen Prinzips sowie der sonstigen Beobachtungen über den Einfluß der Bewegung der Körper gegeneinander wurden außer diesem Prinzip keine anderen Tatsachen oder Hypothesen herangezogen, als die in der Maxwellschen Elektrodynamik des Vakuums und der ruhenden Körper enthaltenen. Alles weitere ergab sich als notwendige, eindeutige Folge. Unter Vorbehalt einer Prüfung der Dynamik des Elektrons können wir also behaupten: Die Erfahrungen auf elektromagnetischem Gebiete bestätigten das Relativitätsprinzip in allen seinen Folgerungen.

§ 22. Energie und ponderomotorische Kraft.

a) Die Unzulänglichkeit der Maxwellschen Theorie. Einige Überlegung erfordert die Ableitung der ponderomotorischen Kraft für die Minkowskische Elektrodynamik, denn der Ansatz (IX) und (X) der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper kann schon aus dem Grunde nicht für unbedingt richtig angesehen werden, weil nach ihm auch Punkte des leeren Raumes Kräfte erfahren können. An dieser Stelle müssen wir also die Maxwellsche Theorie zunächst ergänzen, doch so, daß ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung dabei nicht aufgehoben wird. Nun haben wir schon im § 15 (S. 85, Anm.) gesehen, daß die Kraft auf das Vakuum dann auftritt, wenn man die elektromagnetische Bewegungsgröße nicht berücksichtigt. Es kann daher kein Zweifel sein, daß man den Ansatz (IX) nach (95a) zu

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}_e}{\partial t}$$

zu erweitern hat. Vorläufig kennen wir die Größe der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ freilich nur für den leeren Raum; nach (95) ist sie dort gleich $1/c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$.

b) Die Transformation beliebiger ponderomotorischer Kräfte. Nun konnten wir die Kraftdichte nach (86) und (86a) unter Hinzufügung ihrer Leistung (mit dem Faktor i/c) als zeitartiger Komponente zu der Viererkraft F ergänzen, welche

sich wegen ihrer Vektoreigenschaft auf den Tensor T vermöge der Beziehung (XVI)

$$F = -\mathit{div}\, T \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XVI)}$$

zurückführen ließ. Es müssen sich aber alle ponderomotorischen Kräfte, gleichgültig welchen Ursprunges, der Lorentz-Transformation gegenüber gleich verhalten. Denn ist in einem berechtigten Systeme ein Körper unter dem Einfluß verschiedenartiger Kräfte im dynamischen und thermischen Gleichgewichte, so daß sich sein Zustand im Laufe der Zeit nicht ändert, so bedeutet dies, daß die Resultante aus diesen Kräften sowie ihre Leistungen in Summa verschwinden. Der Tatbestand der Unveränderlichkeit des Zustandes kann aber nicht dadurch aufgehoben werden, daß wir der Betrachtung ein anderes Bezugssystem zugrunde legen. Auch in diesem müssen sich die Kräfte und ihre Leistungen gegeneinander aufheben. Dies können sie aber nur dann in beiden Systemen tun, wenn sie sich alle gleich transformieren, d. h. wenn sich jede Art von Kräften mit der entsprechenden Leistung zu einem Vierervektor zusammenfassen und damit nach (XVI) auf einen Welttensor zurückführen läßt.

c) Die Bedeutung der Komponenten des Welttensors T. Nun muß aber Gleichung (XVI), angewandt auf die zeitartige Komponente:

$$\frac{c}{i} F_l = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{i} T_{lx}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{i} T_{ly}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c}{i} T_{lz}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-T_{ll}\right)$$

den Energiesatz enthalten, da links die Leistung (A) der Kraft pro Volumeinheit steht. Setzen wir nämlich:

$$-ic\, T_{lx} = \mathfrak{S}_x \text{ usw.}, \quad -T_{ll} = W \quad \ldots\ldots \text{(149)}$$

wie in (89), so lautet diese Beziehung:

$$A + \mathit{div}\, \mathfrak{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \cdots\cdots \text{(150)}$$

durch Integration über einen abgeschlossenen Bereich geht sie nach dem Gaußschen Satz ($\varkappa$) über in

$$\int A\, dS + \frac{d}{dt}\int W\, dS = \int \mathfrak{S}_n\, d\sigma.$$

Es ist aber nach dem Energieprinzip das Kennzeichen der Begriffe Energiedichte und Energieströmung, daß sie zur Leistung

$\int A\,dV$ in dem Zusammenhange stehen, wie hier die Größen W und $\mathfrak{S}$. Wir werden daher den Skalar W als Energiedichte, den Vektor $\mathfrak{S}$ als Energiestrom betrachten.

Angewandt auf die raumartigen Komponenten ergibt (XVI):

$$F_x = \mathfrak{F}_x = -\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{ic} T_{xl}\right) \text{ usw.},$$

und wenn wir

$$T_{xx} = p_{xx}, \quad T_{xy} = p_{xy} \text{ usw.} \quad -i/c\, T_{xl} = \mathfrak{g}_x \text{ usw.} \quad . \quad (149\,\mathfrak{a})$$

setzen:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (150\,\mathfrak{a})$$

oder nach derselben Integration wie oben gemäß ξ:

$$\int \mathfrak{F}\,dS + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{g}\,dS = \int \mathfrak{p}_n\,d\sigma.$$

Wir wollen nun, wie schon in § 15 erwähnt, außer dem Energieprinzip auch den Impulssatz als ein empirisch wohlbegründetes Axiom in die Relativitätstheorie übernehmen. $dt\int \mathfrak{F}\,dS = \mathfrak{K}\,dt$ ist der mechanische Impulszuwachs, welcher die betrachtete Kraft den Körpern im Integrationsgebiete in der Zeit dt verleiht. Soll also die letzte Gleichung für alle nur denkbaren körperlichen Systeme und Vorgänge gelten, so müssen wir $dt\,\frac{d}{dt}\int \mathfrak{g}\,dS$ als den nichtmechanischen Impulszuwachs und das Oberflächenintegral $dt\int \mathfrak{p}_n\,d\sigma$ als die von der Umgebung ausgeübte Kraft, d. h. $\boldsymbol{p}$ als einen räumlichen Spannungstensor deuten — genau so wie in § 15.

Freilich sind diese Bestimmungen nicht eindeutig. Man kann als Energiedichte W vermehrt um einen zeitlich unveränderlichen Skalar, als Impulsdichte $\mathfrak{g}$ vermehrt um einen solchen Vektor, als Energieströmung die Summe aus $\mathfrak{S}$ und einen divergenzfreien Vektor und als Spannungstensor die Summe aus $\boldsymbol{p}$ und einem divergenzfreien Tensor ansehen, ohne daß sich etwas an den Gleichungen (150) und (150 a) ändert. Eine weitergehende Unbestimmtheit, daß sich z. B. für W zwei wesentlich verschiedene Zustandsfunktionen angeben ließen, die der obigen Energiegleichung genügen, widerspräche dem Energieprinzip, welches

wesentlich darauf beruht, daß die Energie nur bis auf eine additive Konstante unbestimmt bleibt, und Entsprechendes gilt für den Impuls. Wenn wir aber darüber hinaus von den angegebenen möglichen Zusätzen absehen, so ist das zweifellos eine neue Hypothese, welche zurzeit noch nicht einmal empirisch völlig zu rechtfertigen ist, sondern sich zunächst nur durch die außerordentliche Vereinfachung empfiehlt, welche sie in die Theorie, besonders auch in die Mechanik hineinbringt. Sie gestattet, wie der Vergleich von (149), (149a) und der Beziehung $T_{jk} = T_{kj}$ unmittelbar zeigt, vor allem die bisher völlig unzusammenhängenden Begriffe des Impulses und der Energieströmung in die universelle Beziehung

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(XXV)}$$

zu setzen (Planck[1]), welche wir als den Satz von der Trägheit der Energie bezeichnen*). Wir werden diese Hypothese in der vorliegenden Schrift dauernd beibehalten.

Außer dem nichtmechanischen Impuls gibt es dann, wie wir schon in § 15 an dem Beispiele des elektromagnetischen Impulses sahen, einen gleichartigen Drehimpuls, welcher sich nach der Formel (101)

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\, dS$$

berechnet. Die dortigen Betrachtungen können unverändert übernommen werden. Wie die Summe aus allen Impulsarten, so ist auch die aller Drehimpulse zeitlich unveränderlich.

d) Anwendung auf die Elektrodynamik. Wenden wir dies Ergebnis auf die Elektrodynamik, und zwar im System K^0 an, so finden wir nach (XXV), da der Energiestrom nach (14a) $\mathfrak{S}^0 = c[\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0]$ ist, als die Dichte des elektromagnetischen Impulses den Vektor

$$\mathfrak{g}_e^0 = 1/c\, [\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0] \quad \cdots\cdots\cdots \quad (151)$$

Wir bleiben in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn wir für den Spannungstensor $\boldsymbol{p}^0$ den Maxwellschen Ansatz (X) unverändert übernehmen und nach (150a)

$$\mathfrak{F}^0 = -\operatorname{div} \boldsymbol{p}^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,[\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0] \quad \cdots\cdots \quad (151a)$$

*) Näheres vgl. § 24.

setzen. Denn die Zusatzkraft $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]$ entzieht sich durch ihre Kleinheit stets der Beobachtung *). Auch enthält in diesem Falle die Fortlassung eines zeitlich unveränderlichen Summanden in (151) keine neue Hypothese. Denn ein solches Glied bliebe auch dann bestehen, wenn das elektromagnetische Feld verschwindet; es entbehrte in diesem Falle aber offenbar jeder Berechtigung.

Damit ist die oben geforderte Ergänzung der Maxwellschen Theorie durchgeführt. Der elektrodynamische Welttensor T ist durch die Angabe von W^0 (Formel VIII), $\boldsymbol{p}^0$ (IX) und $\mathfrak{g}^0$ bzw. $\mathfrak{S}^0$ (151) eindeutig bestimmt. Will man die Energie oder Impulsdichte für ein anderes System K berechnen, in welchem sich der Körper bewegt, so hat man nur die Komponenten von T gemäß der in § 13 angegebenen Regel [vgl. (102)] und die Raumvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ nach § 19 zu transformieren. Wir müssen uns die Ausführung dieser Rechnung des Platzes wegen versagen. Abraham [2]) findet dabei:

$$\mathfrak{S} = c^2\mathfrak{g}_e = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q},[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-[\mathfrak{D}\mathfrak{B}])}{c^2-q^2},$$

$$W = \tfrac{1}{2}\Big((\mathfrak{E}\mathfrak{D})+(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\Big) + \frac{c}{c^2-q^2}\Big(\mathfrak{q},[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]-[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\Big).$$

e) Die Joulesche Wärme. Trotz der unter b) auseinandergesetzten Gemeinsamkeit des Verhaltens der Viererkraft F in den beiden Gebieten der Elektrodynamik besteht doch ein gewisser, auf der atomistischen Struktur der Materie beruhender Unterschied hinsichtlich der Bedeutung ihrer zeitartigen Komponente. In § 15 war F senkrecht auf der Weltlinie des Elektrons.

*) Berechnet man den Maxwellschen Wert der Kraftdichte aus (IX) und (X), so findet man dabei einen Summanden

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t^0}\Big(\varepsilon\mu\,[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]\Big),$$

welcher stets unterhalb der Grenze der Meßmöglichkeit liegt (vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld; Leipzig 1900, S. 553). Unser Zusatz macht daraus

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t^0}\Big((\varepsilon\mu-1)\,[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]\Big),$$

was von derselben Größenordnung ist.

Hier aber haben die Weltlinien der Leitungselektronen im allgemeinen andere Richtungen als die Weltlinie der materiellen Punkte des Körpers (vgl. Fig. 12). So können wir es verstehen, daß hier die Viererkraft auf den letzteren nicht senkrecht steht. In der Tat ist die zur Weltlinie parallele Komponente von F, d. h. ihre zeitartige Komponente bezogen auf das System K^0, nach Gleichung (149), (14) und (14 a):

$$F_{l0} = -\Delta i v_{l0}\, T$$

$$= -\frac{i}{c}\left(div\, \mathfrak{S}^0 + \frac{\partial W^0}{\partial t}\right) = \frac{i}{c}\,(\mathfrak{J}^0\, \mathfrak{E}^0) = \frac{i}{c}\, Q^0,$$

also im allgemeinen von Null verschieden. Auch wenn der Körper ruht, leistet die elektrodynamische Kraft an den sich in ihm bewegenden Leitungselektronen eine Arbeit, welche sich als Joulesche Wärme Q^0 äußert *). Bewegt sich ein Körper, so tritt zu dieser natürlich noch die mechanische Arbeit am Körper selbst, so daß im allgemeinen $(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q$ als die gesamte Leistung anzusehen und

$$F_l = i/c\, \{(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q\} \quad \ldots\ldots \quad (152)$$

zu setzen ist. Nach (51) und (48) ist nun, in einem beliebigen System berechnet, das skalare Produkt:

$$(YF) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{ \mathfrak{q}_x \mathfrak{F}_x + \mathfrak{q}_y \mathfrak{F}_y + \mathfrak{q}_z \mathfrak{F}_z - \{(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q\} \right\}$$

$$= \frac{-Q}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Wegen seiner Invarianz gegen die Lorentz-Transformation gilt als Transformationsformel für die pro Zeit- und Volumeinheit erzeugte Wärme:

$$\frac{Q}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{Q'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{1}{c}\, Q^0 \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

*) Genau genommen ist unter Q^0 alle die Energie (pro Zeit und Volumeinheit) gemeint, welche das elektromagnetische Feld als Arbeit in den Atomen leistet, also außer der Jouleschen auch die Peltier- und Thomsonwärme, die Energievermehrung durch chemische Zersetzungen oder Konzentrationsänderungen. Nur weil diese alle auf Inhomogenitäten der Körper beruhen, müssen wir sie im Text ausschließen (vgl. S. 20, Anm.).

Um Q für ein beliebiges System durch die Feldvektoren auszudrücken, beachten wir, daß nach (134b) und (138) das skalare Produkt:

$$(\mathcal{A}[Y\mathfrak{M}]) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{(\mathfrak{Z} + \lambda \mathfrak{q}, \mathfrak{E}^*) - \lambda(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)\right\} = \frac{(\mathfrak{Z}\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

also, für K^0 berechnet,

$$(\mathcal{A}[Y\mathfrak{M}]) = \frac{(\mathfrak{Z}^0\mathfrak{E}^0)}{c} = \frac{1}{c}Q^0$$

ist. Aus den beiden letzten Gleichungen und (153) folgt:

$$Q = (\mathfrak{Z}\mathfrak{E}^*) = (\mathfrak{Z}, \mathfrak{E} + 1/c\,[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Für die Umrechnung der elektrodynamischen Kraftdichte $\mathfrak{F}$ bei der speziellen Lorentz-Transformation (XI) gelten ähnliche Formeln wie in der Elektronentheorie; man erhält sie unmittelbar aus (87), indem man entsprechend (152) dort $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ durch $(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q$ ersetzt*):

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\mathfrak{F}'_x + v/c^2\left((\mathfrak{q}'\mathfrak{F}') + Q'\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}'_y, \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}'_z \quad (155)$$

Für die Gesamtkraft $\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F}\,dV$ folgt daraus wie in § 15 [vgl. (87a)] und unter denselben Beschränkungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\mathfrak{K}'_x + v/c^2\left((\mathfrak{q}'\mathfrak{K}') + R'\right)}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}}, \\ \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}'_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}}&, \quad \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}'_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (155a)$$

Dabei ist $R = \int Q\,dV$ die gesamte im materiellen Volumen V pro Zeiteinheit entwickelte Wärme. Für sie gilt nach (153) die Transformationsformel:

$$\frac{R}{c^2 - q^2} = \frac{R'}{c^2 - q'^2} = \frac{R^0}{c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155b)$$

*) Bei Berücksichtigung der Elektrostriktion kommt noch ein weiteres Glied hinzu, welches mit der zeitlichen Veränderung des Spannungszustandes proportional ist. Dessen Vernachlässigung erklärt auch den Unterschied zwischen unserer Gleichung (155a) und der entsprechenden Formel (32) bei M. Planck[3]).

Wir ziehen aus diesen Gleichungen die ebenso wichtige wie merkwürdige Folgerung, daß im ungestrichenen System eine Kraft auch dann auftreten kann, wenn im gestrichenen System keine vorhanden ist; dann nämlich, wenn Joulesche Wärme entwickelt wird. Erleidet nun irgend ein vom Strom durchflossener Leiter bei Ruhe keine Gesamtkraft, wie z. B. ein unendlich langer Draht von kreisförmigem Querschnitt, so behält er seinen Ruhezustand bei. Beziehen wir denselben Vorgang auf ein berechtigtes System, in welchem er sich bewegt, so heißt dies, er ändert seine Bewegung nicht von selbst. Dennoch erfährt er in diesem System eine Kraft. Es gibt also Fälle, in welchen eine Kraft die Geschwindigkeit unbeeinflußt läßt. Dies auffallende Ergebnis wird sich in dem siebenten Teile dieses Buches, welcher der Mechanik der Relativitätstheorie gewidmet ist, aus der Trägheit der Energie (XXV) erklären lassen.

Selbstverständlich gelten die Transformationsformeln (153), (153a), (155) und (155a) auch dann, wenn die Wärmemengen und Kräfte nicht elektrodynamischen, sondern irgend eines anderen Ursprunges sind.

§ 23. Der Strahlungsdruck.

Eine wichtige, auch der experimentellen Prüfung zugängliche Folgerung des Satzes (XXV) $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ ist die, daß jeder von elektromagnetischer Strahlung getroffene Körper eine ponderomotorische Wirkung erleitet. Trotzdem die Deutung der einschlägigen Experimente keineswegs der Relativitätstheorie vorbehalten blieb, sondern die Existenz und der Wert dieses Druckes schon von Maxwell (1881) und Boltzmann (1884) vorausgesagt wurden, mag hier kurz darauf eingegangen werden.

Zu diesem Zweck wollen wir für den schon in § 16b) untersuchten Fall der Spiegelung einer ebenen Welle an einem unbegrenzten ebenen Spiegel die ponderomotorischen Kräfte ableiten. Den Spiegel setzen wir als undurchsichtig voraus. Die Bezeichnungen wählen wir wie dort, und legen zunächst das mit dem Spiegel bewegte System K^0 der Betrachtung zugrunde, wollen aber vorläufig die Indices 0 beim Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ und den Winkeln ψ_1 und ψ_2 fortlassen.

Die einfallende Welle läßt auf ein Flächenstück $d\sigma$ des Spiegels in der Zeit dt nach der Definition des Pointingschen Vektors $\mathfrak{S}$ die Energie

$$|\mathfrak{S}_1|\, d\sigma \cos\psi_1\, dt$$

fallen. Die reflektierte Welle schafft in derselben Zeit von dort die Energie

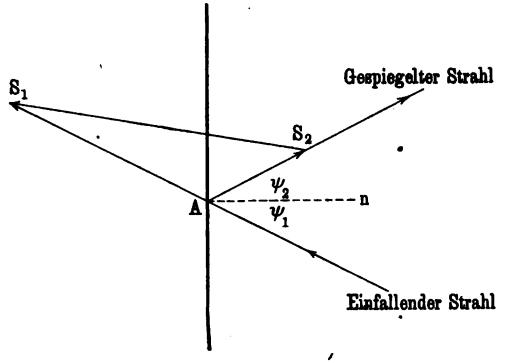
$$|\mathfrak{S}_2|\, d\sigma \cos\psi_2\, dt$$

fort. Die Differenz gibt daher die durch Absorption von Strahlung entwickelte Wärme an; ihr Betrag ist pro Zeit- und Flächeneinheit [nach (107)]:

$$r = \big(|\mathfrak{S}_1| - |\mathfrak{S}_2|\big)\cos\psi_1 = |\mathfrak{S}_1|\,|1 - U|\cos\psi_1 \quad . \quad (156)$$

Von der einfallenden Welle verschwindet an $d\sigma$ in der genannten Zeit ein schiefer Zylinder, der diese Fläche als Basis

Fig. 13.



und in der Strahlrichtung die Länge $c\,dt$, daher den Inhalt $c\cos\psi_1\, d\sigma\, dt$ hat. Er enthält nach (XXV) die Bewegungsgröße:

$$g_e\, c\cos\psi_1\, d\sigma\, dt = \frac{\mathfrak{S}_1}{c}\cos\psi_1\, d\sigma\, dt,$$

welche in Fig. 13 durch die Strecke $\overrightarrow{AS_1}$ dargestellt wird. Während dieser Impuls verschwindet, entsteht an $d\sigma$ neu derjenige Impuls, welcher in einem zylindrischen Stück der reflektierten Welle enthalten ist, dessen Grundfläche wiederum $d\sigma$ und dessen Länge in der Strahlrichtung ebenfalls $c\,dt$ ist. Sein Impuls ist demnach

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{c}\cos\psi_2\, d\sigma\, dt = \frac{\mathfrak{S}_2}{c}\cos\psi_1\, d\sigma\, dt,$$

er wird in Fig. 13 durch die Strecke $\overrightarrow{A S_2}$ dargestellt. Nach dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses muß daher der Spiegel einen mechanischen Impuls gewinnen, welcher, zu dem letzteren Vektor addiert, den ersteren ergibt, also durch die Strecke $\overrightarrow{S_2 S_1}$ repräsentiert wird. Seine Komponenten sind: normal zum Spiegel

$$-1/c\left(|\mathfrak{S}_1| + |\mathfrak{S}_2|\right) cos^2 \psi_1 \, d\sigma \, dt,$$

tangential dazu

$$1/c\left(|\mathfrak{S}_1| - |\mathfrak{S}_2|\right) cos\, \psi_1 \, sin\, \psi_1 \, d\sigma \, dt.$$

Da diese Impulszunahme in der Zeit dt vor sich geht, so erfährt er eine Kraft, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, in ihrer normalen und ihrer tangentialen Komponente wegen (107) die Werte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_n &= -|\mathfrak{S}_1|(1 + U) cos^2 \psi_1 : c \\ \mathfrak{P}_t &= \quad |\mathfrak{S}_1|(1 - U) cos\, \psi_1 \, sin\, \psi_1 : c \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (157)$$

hat.

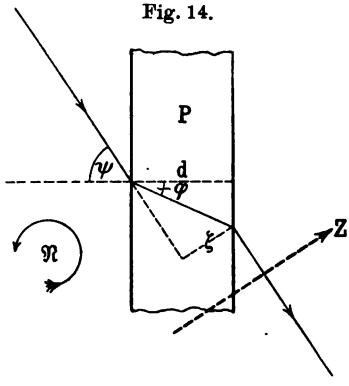
Wie der Strahlvektor $\mathfrak{S}_1$ ist natürlich auch diese Kraft zeitlich schnell veränderlich; bei spektral homogener Strahlung ist z. B. jener eine periodische Funktion der Zeit und die Periode halb so lang wie die einer Schwingung, also bei allen Schwingungen aus dem Spektralbereich der Wärmestrahlung außerordentlich kurz. Zur Messung gelangt daher stets nur der Mittelwert von $\mathfrak{P}$, gebildet über ein gegen die Lichtperiode sehr langes Zeitintervall. Doch gelten die abgeleiteten Formeln auch für diesen, wenn man unter $|\mathfrak{S}_1|$ den entsprechenden Mittelwert für die Energiestrahlung versteht. Dies ist der von Lebedew, sowie Nichols und Hull experimentell nachgewiesene Strahlungsdruck. Er wird natürlich nicht nur auf undurchsichtige Spiegel ausgeübt, sondern ganz allgemein auf alle Körper, welche Licht trifft; sein Betrag ist nach den soeben auseinandergesetzten Prinzipien stets einfach zu berechnen.

Schwieriger kann diese Aufgabe nur dann werden, wenn die Flächen nicht glatt, oder die Dimensionen der Körper so klein werden, daß die Wellenlänge des Lichtes neben ihnen nicht mehr zu vernachlässigen ist. In diesem Falle tritt Beugung der Strahlung ein, und es ist der mathematischen Schwierigkeiten wegen zurzeit nur für kugelförmige Teilchen gelungen, den Strahlungsdruck ohne jede Einschränkung zu berechnen (Debye). Doch

kann man von diesem Spezialfall auch auf anders geformte kleine Teilchen und einzelne Moleküle den wichtigen Schluß übertragen, daß bei einer bestimmten Größenordnung ihrer Abmessungen die Abstoßung der Sonnenstrahlung die Gravitationsanziehung der Sonne um ein Vielfaches übertreffen kann. Daher spielt der Strahlungsdruck neuerdings eine wichtige Rolle, in der kosmischen Physik z. B. wird er zur Erklärung des merkwürdigen Phänomens der Kometenschweife herangezogen (Arrhenius)

Natürlich übt die Strahlung auch im Innern eines absorbierenden oder zerstreuenden Körpers Druckkräfte aus; denn auch hier muß der Abnahme des elektromagnetischen Impulses eine Zunahme des mechanischen entsprechen. Z. B. wächst in einem durchstrahlten Gase der hydrodynamische Druck in der Strahlrichtung, da sein Gefälle dem Strahlungsdruck das Gleichgewicht halten muß. So klein die dabei auftretenden Druckdifferenzen auch sind, so konnte sie doch Lebedew 1909 nachweisen.

Fig. 14.



Außer dem Druck üben die elektromagnetischen Wellen im allgemeinen auch ein Drehmoment auf die Körper aus. Ein besonders einfaches Beispiel bietet der Fall, daß auf eine planparallele, durchsichtige Platte P eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle unter dem Polarisationswinkel einfällt. Die Welle passiert dann beide Grenzflächen ohne Spiegelung; ihr Impuls bleibt nach Größe und Richtung erhalten, so daß sie im Mittel keine Kraft auf die Platte ausübt. Wohl aber wird sie, wie der Strahlengang in Fig. 14 zeigt, seitwärts um die Strecke

$$\zeta = \frac{d \sin(\psi - \varphi)}{\cos \varphi}$$

verschoben, wenn d die Dicke der Platte, ψ der Einfallswinkel und φ der Winkel ist, den der Strahl in der Platte mit ihrer Normalen bildet. Betrachten wir etwa den Teil der Welle, welcher in dem schon oben besprochenen Zylinder von der Grundfläche $d\sigma$

und der Länge $c\,dt$ liegt, legen wir ferner die Z-Achse senkrecht zur Strahlrichtung in die Einfallsebene, und nennen wir z den Wert dieser Koordinate für einen Punkt des Zylinders, so ist nach (101) und (XXV) dessen Beitrag zum elektromagnetischen Drehimpuls senkrecht zur Einfallsebene

$$z\,|\mathfrak{g}_e|\,c\,d\sigma\,dt\cos\psi = \frac{|\mathfrak{S}|}{c}\,z\cos\psi\,d\sigma\,dt.$$

Dieser Betrag verschwindet an der Vorderfläche der Platte in der Zeit dt; neu entsteht dafür an der Rückfläche ein ihm gleiches zylindrisches Stück der austretenden Welle, in welchem die z-Koordinate aber den größeren Wert $z+\zeta$ hat, und das daher den Beitrag

$$\frac{|\mathfrak{S}|}{c}\,(z+\zeta)\cos\psi\,d\sigma\,dt$$

liefert. Der elektromagnetische Drehimpuls wächst also pro Zeiteinheit um

$$\frac{d\,|\mathfrak{L}_e|}{dt} = \frac{|\mathfrak{S}|}{c}\,\zeta\cos\psi\,d\sigma.$$

Im gleichen Maße, aber im entgegengesetzten Sinne muß sich nach dem Satze von der Erhaltung des Drehimpulses der mechanische Drehimpuls verändern. Das auf die Platte pro Flächeneinheit ausgeübte Drehmoment ist demnach $= \frac{1}{c}\,|\mathfrak{S}|\,\zeta\cos\psi$; es sucht sie um eine zur Einfallsebene senkrechte Achse in dem in der Figur angegebenen Sinne zu drehen.

Zum Schluß wollen wir den zuerst betrachteten Spiegelungsvorgang auf das auch schon in § 16, b) eingeführte System K beziehen, in welchem der Spiegel die Geschwindigkeit q in Richtung seiner Normalen hat. Da Flächenstücke, welche zur Relativgeschwindigkeit zweier berechtigten Systeme senkrecht sind, beim Übergang von einem zum anderen nicht verändert werden, so können wir die auf die Flächeneinheit bezügliche Kraft $\mathfrak{P}_n$ und Wärmemenge r wie $\mathfrak{R}$ und R nach den Formeln (155a) und (155b) transformieren. Die Bedingung des stationären Zustandes, an welche diese Gleichungen ebenso wie (87a) gebunden sind, werden hier zwar nicht von den Momentanwerten des Strahlungsdruckes und der Wärme r erfüllt, wohl aber von den zeitlichen Mittelwerten, von denen im folgenden allein die Rede

sein soll. Wir finden auf die angegebene Art, wenn wir in (156) und (157) die Größen r, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}_t$ sowie $|\mathfrak{S}_1|$ und ψ_1 zum Hinweis auf das System K^0 mit dem Index 0 versehen und dann nach (108) statt $|\mathfrak{S}_1^0|$ und ψ_1^0 die auf das System K bezogene Intensität $|\mathfrak{S}_1|$ und den Einfallswinkel ψ_1 einführen, nach leichten Umrechnungen:

$$r = r^0 \frac{c^2 - q^2}{c^2} = |\mathfrak{S}_1| (1 - U) \frac{(c + q \cos\psi_1)(c \cos\psi_1 + q)}{c^2},$$

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_n^0 + \frac{q}{c^2} r^0$$

$$= -\frac{|\mathfrak{S}_1|}{c} (c \cos\psi_1 + q) \left\{ \frac{\cos\psi_1}{c} + U \frac{2q + c \cos\psi_1 (1 + q^2/c^2)}{c^2 - q^2} \right\},$$

$$\mathfrak{P}_t = \mathfrak{P}_t^0 = \frac{|\mathfrak{S}_1|}{c} (1 - U) \frac{\sin\psi_1 (c \cos\psi_1 + q)}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Hier ist angenommen, daß q vom Spiegel in den leeren Raum hinein weist. Anderenfalls wäre q durch $-q$ zu ersetzen. Sowohl die absorbierte Wärme als der Druck wachsen also bei einer Bewegung des Spiegels dem einfallenden Strahl entgegen; sie nehmen im entgegengesetzten Falle ab.

VII. Dynamik.

§ 24. Die mechanische Trägheit als Wirkung der Energie.

a) Zweck und Ausgangspunkt der Betrachtungen. Zur Vervollständigung unserer Betrachtungen müssen wir noch auf die Mechanik und Thermodynamik eingehen. Einmal nämlich sahen wir, daß die Mechanik der bewegten Körper zur Erklärung des Trouton-Nobleschen Versuches herangezogen werden muß, wenn man deren Theorie nicht auf das mitbewegte System, sondern auf ein anderes beziehen will; sodann fehlt uns noch die Theorie zu den in § 2 besprochenen Versuchen über die Dynamik des Elektrons. Endlich aber — und das ist vielleicht das Wichtigste — müssen wir noch zeigen, daß die klassische Mechanik und Thermodynamik als eine für die Diskussion aller einschlägigen Erfahrungen ausreichende Annäherung in der Dynamik

der Relativitätstheorie enthalten sind, daß mithin keine dieser Beobachtungen mit dem Einsteinschen Relativitätsprinzip im Widerspruch steht. Die beiden genannten Gebiete, welche bisher gänzlich getrennt behandelt werden konnten, müssen hierbei vereinigt werden, weil hier ähnliche Verhältnisse vorliegen wie in § 22, wo die Joulesche Wärme in die elektrodynamische Viererkraft einging.

Die Dynamik des Massenpunktes hat zuerst A. Einstein in seiner grundlegenden Arbeit (1905) nach der Relativitätstheorie behandelt [1]). Er geht davon aus, daß im jeweils mitbewegten System K^0, also für $\mathfrak{q} = 0$, die klassische Mechanik gelten muß. und transformiert Gleichung (1)

$$m\,\dot{\mathfrak{q}}^0 = \mathfrak{K}^0$$

gemäß (122a) und (87a) auf ein beliebiges System K; diese einfache Rechnung ist schon in § 18 beim Übergange von (128) zu (128a) ausgeführt. Dies Vorgehen hat aber einen Nachteil. Wie wir schon in § 17 beim Trouton-Nobleschen Versuch sahen, muß der Einfluß der in einem Körper vorhandenen Spannungen untersucht werden. Die klassische Dynamik weiß von einem solchen nichts; Gleichung (1) wird nicht anders, wenn wir sie auf ein elastisch gespanntes Körperelement anwenden. Man erfährt daher nie etwas über den Einfluß der Spannungen, wenn man von ihr als einer Näherung ausgeht.

Sodann aber widerspräche es dem Prinzip, die Zahl der Hypothesen auf ein Minimum einzuschränken, wenn wir hier die klassische Mechanik als Näherung annehmen wollten. Denn sie enthält nichts als den Impulssatz $\mathfrak{K} = \dfrac{d\mathfrak{G}}{dt}$ und die Annahme $\mathfrak{G} = m\mathfrak{q}$. Den ersteren haben wir schon eingeführt und in der Gleichung (XVI) $F = -\mathit{div}\,T$ vierdimensional formuliert, der Impuls aber läßt sich nach dem Satz von der Trägheit der Energie auf andere Größen zurückführen. Es muß also möglich sein, allein auf Gleichung (XVI) die Dynamik zu begründen. Da sie auch den Energiesatz, und zwar als für alle berechtigten Systeme gültig ausspricht, so entspricht dies Vorgehen durchaus der Begründung der klassischen Mechanik auf S. 5 durch das Energieprinzip und dessen Invarianz gegen die Galilei-Transformation.

Wir knüpfen also an die Überlegung des § 22 an, wo wir zeigten, daß sich die ponderomotorischen Kräfte, gleichgültig, welchen Ursprungs, alle der Lorentz-Transformation gegenüber gleich verhalten müssen, d. h. daß sich dem Beispiele der elektronentheoretischen Kraftdichte zufolge die Kraftdichte stets unter Hinzunahme der Leistung als zeitartiger Komponente zu einem Vierervektor, der Viererkraft, ergänzen läßt. Die letztere muß sich aus rein mathematischen Gründen gemäß der Gleichung:

$$F = -\mathit{Div}\, T \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVI)}$$

auf einen Welttensor T zurückführen lassen, und zwar muß diese Gleichung, angewandt auf die zeitliche Komponente, notwendigerweise als Ausdruck des Energieprinzips, angewandt auf die räumlichen Komponenten als Formulierung des Impulssatzes gelten, wenn anders wir diese beiden Prinzipien überhaupt beibehalten. Das führt dazu, die Komponenten T_{xx}, T_{xy} usw. als die Komponenten eines räumlichen Spannungstensors $\boldsymbol{p}$, $-T_{ll}$ als die Energiedichte und $-ic\,T_{xl}$ usw. als Komponenten der Energieströmung $\mathfrak{S}$ aufzufassen [(149) und (149a)] und aus der Definition des Welttensors den Satz von der Trägheit der Energie

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXV)}$$

abzuleiten.

b) Impuls und Energie. Soll (XVI) nun auch die Dynamik enthalten, so müssen wir die obigen als Welttensorkomponenten definierten Größen als Dichte des mechanischen Impulses, als mechanische Spannungen usw. deuten, wobei gleich vorweggenommen werden mag, daß der Tensor $\boldsymbol{p}$, dessen Komponenten T_{xx} usw. sind, mit dem Tensor, den man gewöhnlich als den elastischen Spannungstensor bezeichnet, zwar nahe zusammenhängt, aber nicht identisch ist.

Am wichtigsten ist die Frage, die Dichte welcher Energiearten wir unter $W = -T_{ll}$ verstehen wollen. Die Antwort soll sein: aller derjenigen, welche die Bewegung der Materie mitmachen, deren Strömung relativ zum Körper Null ist; als da sind Wärme*), chemische, elastische Energie, innere Energie der Atome.

*) Wärmeleitung schließen wir von der Betrachtung aus, die sich somit nur auf gleichförmig temperierte Körper bezieht. Anderenfalls wäre der Wärmestrom in $\mathfrak{S}$ mit aufzunehmen.

Ausdrücklich auszuschließen sind im allgemeinen elektromagnetische und Gravitationsenergie, da diese innerhalb der Körper noch selbständige Bewegung besitzen. In besonderen Fällen können diese freilich auch die genannte Bedingung erfüllen und dann in W mit berücksichtigt werden; ihre Strömung ist dann auch im Vektor $\mathfrak{S}$ mit enthalten.

Im System K^0, in dem der Körper in dem zu betrachtenden Augenblick ruht, ist demzufolge der mechanische Energiestrom $\mathfrak{S}^0$ stets Null. Nach (102) gelten also die folgenden Transformationsformeln für den Übergang von K^0 zu einem System K, in welchem die x-Achse parallel zur Geschwindigkeit $\mathfrak{q} = \mathfrak{v}$ des Körpers ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{q\,c^2}{c^2 - q^2}(p^0_{xx} + W^0) \\ \mathfrak{S}_y = \frac{q\,c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,p^0_{xy}, &\qquad \mathfrak{S}_z = \frac{q\,c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,p^0_{xz} \\ W &= \frac{c^2 W^0 + q^2 p^0_{xx}}{c^2 - q^2} \\ p_{yy} = p^0_{yy}, \qquad p_{zz} = p^0_{zz}, &\qquad p_{yz} = p^0_{yz} \\ p_{xx} &= \frac{c^2 p^0_{xx} + q^2 W^0}{c^2 - q^2} \\ p_{xy} = \frac{c\,p^0_{xy}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, &\qquad p_{xz} = \frac{c\,p^0_{xz}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \end{aligned}\right\} . \quad (158)$$

Daß dort zunächst nur von elektromagnetischen Größen die Rede war, hat ja auf die Gleichungen (102) keinen Einfluß. Man bestätigt aus ihnen, daß

$$\mathfrak{S}_x(1 + q^2/c^2) = q(W + p_{xx}), \quad \mathfrak{S}_y = q\,p_{xy}, \quad \mathfrak{S}_z = q\,p_{xz}$$

ist, d. h. vektoriell geschrieben (nach λ'):

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{S})}{c^2} = W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}] \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (158a)$$

Das erste Glied rechts zeigt hier den Konvektionsstrom der Energie, das zweite die Energiebewegung infolge der Arbeit der Spannungen an. Nach dem Satz von der Trägheit der Energie (XXV) schließen wir daraus:

$$c^2\mathfrak{g} + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{g}) = W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}] \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (\text{XXVI})$$

Führen wir endlich den unsymmetrischen Tensor der relativen Spannungen t durch die Definition

$$\left.\begin{aligned} t_{jk} &= p_{jk} - g_j q_k \\ \text{(also z. B. } t_{xy} &= p_{xy} - g_x q_y, \quad t_{yx} = p_{yx} - g_y q_x) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (159)$$

ein, so wird nach ν

$$(c^2 - q^2)\mathfrak{g} + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{g}) = W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\mathfrak{t}] \quad . \quad (\text{XXVI a})$$

Integrieren wir noch über dem Volumen eines gleichförmig bewegten Körpers, so finden wir:

$$(c^2 - q^2)\mathfrak{G} + \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{G}) = E\mathfrak{q} + \int [\mathfrak{q}\mathfrak{t}]\, dV \quad . \quad (\text{XXVI b})$$

Durch diese Gleichungen ist der mechanische Impuls zurückgeführt auf die Energie, den Spannungszustand und die Geschwindigkeit.

c) Diskussion von (XXVI). Hier zeigt sich nun die außerordentliche Tragweite des Satzes von der Trägheit der Energie; denn in dem Impuls äußert sich die Trägheit der Körper, welche man bisher als eine besondere, auf nichts anderes zurückführbare Eigenschaft der Materie ansah. Hier aber erscheint sie als eine Wirkung der Energie, welche in der im Strahlungsdruck nachweisbaren Trägheit der elektromagnetischen Energie ihr Analogon hat. Doch wollen wir zunächst nur den speziellen Fall $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = p$, t_{xy} usw. $= 0$, ins Auge fassen, in welchem auf den Körper ein allseitig gleicher Druck wirkt. Diese Spezialisierung wird nur von geringem Belang sein. Denn erfahrungsgemäß ändert sich der Impuls nicht merklich mit den Spannungen, so daß wir schließen müssen, daß bei allen ponderablen Körpern der Konvektionsstrom $W\mathfrak{q}$ bzw. $E\mathfrak{q}$ in (XXVI), (XXVI a und b) den zweiten Vektor auf der rechten Seite weit überwiegt. Dann wird nach (μ') das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\mathfrak{t}] = \mathfrak{q}p$, also $\mathfrak{G}$ parallel $\mathfrak{q}$, somit $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\mathfrak{G}) = q^2\mathfrak{G}$ und

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}}{c^2}(E + pV) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Aus der klassischen Mechanik übernehmen wir vorbehaltlich genauerer Rechtfertigung, daß man als Maß der Trägheit die Masse m des Körpers einführen kann, welche sich durch die Gleichung

$$m = \lim_{q=0} (G/q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160\,\text{a})$$

definieren läßt (dies ist freilich nicht die einzig dort mögliche Definition, wohl aber die einzige, die sich auf die Relativitätstheorie übertragen läßt). Wir finden so aus (160)

$$m = \frac{1}{c^2}(E^0 + p^0 V^0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160\,\mathrm{b})$$

wobei E^0, p^0, V^0 die Werte der betreffenden Größen für $q = 0$ sind. Die Masse ist leicht in absolutem Maß anzugeben, desgleichen p^0 und V^0; daher gestattet die letzte Gleichung, auch die Energie E^0 absolut zu messen. Doch läßt sich dieser absolute Wert durch mechanisch-thermodynamische Methoden nicht nachprüfen, weil dabei immer eine additive Konstante in der Energie unbestimmt bleibt. Daß wir hier über die auf dem Energieprinzip beruhende Definition hinauskommen, liegt wesentlich an dem neu eingeführten Satz (XXV).

Prinzipiell möglich dagegen wäre es, Gleichung (160 b) durch Veränderungen des Energieinhaltes nachzuprüfen. Z. B. muß sich danach jede Temperaturveränderung und die damit verbundene Wärmeaufnahme oder -abgabe durch eine Veränderung der Masse bemerkbar machen. Infolge der Größenordnung des Faktors $1/c^2 = 1{,}11 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sec}^2$ ist diese freilich so minimal, daß kaum die Aussicht besteht, jemals die Meßgenauigkeit weit genug zu steigern. Ein erheblich stärkerer, freilich auch zurzeit noch unmeßbar kleiner Einfluß wäre schon bei der Heranziehung chemischer Wärmetönungen zu erwarten. Berechnen wir z. B., um wieviel die Masse eines Gemisches aus 1 Mol Wasserstoff (2 g) und $^1/_2$ Mol Sauerstoff (16 g) abnimmt, wenn sie sich bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur zu 1 Mol flüssigen Wassers vereinigen. Die Wärmeentwickelung beträgt 68 400 cal $= 2.87 \cdot 10^{12}\,[\mathrm{g\,cm^2\,sec^{-2}}]$, die Abnahme der Masse demnach $3{,}2 \cdot 10^{-9}\,[\mathrm{g}]$, was gegen die Gesamtmasse der Mischung (18 g) verschwindend klein ist. Beachten wir nun, daß selbst bei Abkühlung auf die niedrigsten Temperaturen die spezifischen Wärmen und die Wärmetönungen der Größenordnung nach nicht wachsen, so sehen wir, daß alle thermisch-chemischen Energieveränderungen, denen wir die Körper unterwerfen können, unbeträchtlich sind gegen den Vorrat „latenter“ Energie, welchen sie auch noch bei 0° absolut behalten, und welcher sich in ihrer Trägheit äußert. Da weder Bewegungen, noch Umlagerungen der chemischen Atome ihr etwas

anhaben können, so muß ihr Sitz im Innern der Atome sein. Nähere Vorstellungen können wir uns zurzeit davon noch nicht bilden.

Um so wichtiger ist es, daß neuerdings eine Klasse von Vorgängen entdeckt worden ist, bei welcher diese latente Energie unmittelbar zutage tritt. Es ist dies die Zertrümmerung der Atome, welche das Wesen der radioaktiven Erscheinungen ausmacht. Es ist eine experimentell sicher festgestellte Tatsache, daß z. B. beim Zerfall des Radiums andere chemische Elemente, unter anderem Helium entstehen, und es steht ebenfalls fest, daß in den radioaktiven Stoffen dauernd eine starke Wärmeentwickelung stattfindet, welche ebenso wie die zur Entsendung der verschiedenen radioaktiven Strahlen nötige Energie nur aus der latenten Energie der zerfallenden Radiumatome stammen kann. Die gesamte von einem Grammatom (225 g) pro Stunde entwickelte Energie beträgt 30240 Cal $= 1{,}26 \cdot 10^{12}$ [g cm^2 sec^{-2}] (Precht). Die Massenverminderung pro Stunde beträgt also $1{,}41 \cdot 10^{-9}$ g, pro Jahr daher $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ [g]. Freilich ist auch diese Massenabnahme zunächst wohl kaum nachweisbar. Erwähnt sei, daß das hohe Atomgewicht der radioaktiven Substanzen auf eine besonders große latente Energie hinweist. Die hier aus der Trägheit der Energie gezogenen Folgerungen finden somit bei den radioaktiven Vorgängen eine Bestätigung.

§ 25. Impuls, Energie und Spannung in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und dem inneren Zustand.

a) Ableitung der Gleichungen. Die Transformationsformeln (158) enthalten in Verbindung mit (XXV) aber noch mehr als die Gleichung (XXVI). Wir wollen zunächst den Gleichungen für W und $\mathfrak{S}$ ihre formale Abhängigkeit von der speziellen Wahl des Koordinatensystems nehmen. Sie lauten dann [wie man auch nach δ direkt aus (102 a) schließen kann]:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{c^2}{c^2 - q^2}\left\{ W^0 + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0]) \right\} \\ \mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} &= \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\left\{ W^0 + \frac{1}{q^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0]) \right\} \\ &+ \frac{1}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{ [\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0]) \right\} \end{aligned}\right\} . \quad \text{(XXVII)}$$

Man bestätigt dies, indem man wieder die obige spezielle Lage der Achsenkreuze in K und K^0 einführt und die auftretenden Vektoren nach ihnen in Komponenten zerlegt (vgl. dabei λ'). Hier sind Energie- und Impulsdichte angegeben als Funktionen der Geschwindigkeit und des „inneren" Zustandes des Körpers, d. h. des Zustandes bezogen auf das mitbewegte System K^0. Sowohl W als der absolute Wert $|\mathfrak{g}|$ hängen außer von dem absoluten Wert q noch von der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ ab. Von besonderem Interesse ist, daß der Vektor

$$\left\{ [\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^0] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2}(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^0]) \right\}$$

die auf $\mathfrak{q}$ senkrecht stehende Komponente von $[\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^0]$ ist (sein skalares Produkt mit $\mathfrak{q}$ verschwindet nämlich identisch). Die Impulsdichte setzt sich daher 1. aus einer zur Geschwindigkeit parallelen und zu $\frac{q}{c^2 - q^2}$ proportionalen, 2. aus einer zur Geschwindigkeit senkrechten und zu $\frac{q}{c\sqrt{c^2 - q^2}}$ proportionalen Komponente zusammen.

Schließlich können wir aus (158) und (159) noch die Transformationsformeln für den Tensor der relativen Spannungen herleiten, wobei wir aber die der Formel (XI) entsprechende Wahl der Koordinatensysteme beibehalten. Wir finden, da in K^0 die Tensoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{t}$ miteinander zusammenfallen:

$$\left.\begin{aligned} t_{xx} = p^0_{xx}, \quad t_{yx} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\, p^0_{yx}, \\ t_{xy} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\, p^0_{xy}, \quad t_{yy} = p^0_{yy}, \quad t_{yz} = p^0_{yz} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (161)$$

Die vier nicht hingeschriebenen Formeln findet man, indem man den Index y durch z ersetzt.

Der einfachste Fall ist der, daß, bezogen auf K^0, ein allseitig gleichmäßiger Druck p herrscht; dann ist p^0_{xy} usw. Null, p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz} aber haben den Wert p. Genau das entsprechende gilt aber nach (161) dann auch für $\mathfrak{t}$ in jedem beliebigen System K. Der allseitig gleichmäßige relative Druck

$$p = p' = p^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (161\,a)$$

ist somit eine Invariante der Lorentz-Transformation. Die Formeln (XXVII) lauten dann, da $[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0] = \mathfrak{q}\,p^0$ wird:

$$W = \frac{c^2\,W^0 + q^2 p^0}{c^2 - q^2}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{q}\,\frac{W^0 + p^0}{c^2 - q^2} \quad \cdot \quad \text{(XXVII a)}$$

Durch Addition der ersteren dieser Gleichungen und (162) geht hervor:

$$W + p = \frac{c^2}{c^2 - q^2}\,(W^0 + p^0) \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{(XXVII b)}$$

Schließlich führen wir noch die Integration über einen Körper aus, von dem wir annehmen, daß die Geschwindigkeit sowie der Druck in ihm räumlich konstant sind. Da $d\,V = d\,V^0\,\sqrt{1 - q^2/c^2}$ ist, so finden wir dabei:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{c^2\,E^0 + q^2 p^0\,V^0}{c\,\sqrt{c^2 - q^2}}, \\ E + p\,V &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\,(E^0 + p^0 V^0), \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\,\sqrt{c^2 - q^2}}\,(E^0 + p^0 V^0) = \frac{\mathfrak{q}}{c^2}\,(E + p\,V) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVII c)}$$

Die letzte Gleichung ist mit (160) identisch.

Im allgemeinen tritt nach (XXVII) an die Stelle dieser Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{E^0 + \frac{1}{c^2}\,(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0])\right\} \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\,\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{E^0 + \frac{1}{q^2}\,(\mathfrak{q}, [\mathfrak{q} \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0])\right\} \\ &\quad + \frac{1}{c^2}\left\{[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2}\,(\mathfrak{q}.\,[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0])\right\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVII d)}$$

$\int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0$ ist dabei wie $\boldsymbol{p}^0$ ein symmetrischer Tensor, $[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0]$ das Vektorprodukt aus ihm und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$.

b) Diskussion. Hier bedeutet der Index 0 zunächst, daß die betreffende Größe auf das System zu beziehen ist, in welchem der Körper in dem betreffenden Augenblicke ruht. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß sein innerer Zustand bei einer Geschwindigkeitsänderung unverändert bleibt, d. h. daß man ihm weder

Wärme zuführt, noch den Druck ändert. Dann spielt zwar bei einer beschleunigten Bewegung in jedem Augenblick ein anderes System die Rolle des Systems K^0, aber die mit dem Index 0 versehenen Größen bleiben konstant. Die Gleichungen (XXVII c und d) geben also bei einem adiabatischen, isopieistischen Vorgang unmittelbar die Abhängigkeit der Energie und des Impulses von der Geschwindigkeit an. Man braucht besonders den Wert von $\mathfrak{G}$ nur in $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ einzusetzen, um die Dynamik dieser Vorgänge vollständig zu beherrschen, wie wir es im übernächsten Paragraphen weiter ausführen wollen. Es sei jedoch ausdrücklich auf den wesentlichen Unterschied zwischen den Gleichungen (XXVII), (XXVII a und b) einerseits, (XXVII c und d) andererseits aufmerksam gemacht. Die ersteren gelten gemäß ihrer Ableitung streng*) und ausnahmslos für jede Bewegung; die letztere aber nur, insofern die Geschwindigkeit im Körper als konstant betrachtet werden kann. Genau genommen ist sie dies bei einer beschleunigten Bewegung niemals; denn anderenfalls hätte der Körper vor und nach der Beschleunigung dieselbe Form; während wir doch wissen, daß diese sich der Lorentz-Kontraktion entsprechend ändert. Infolgedessen sind die Gleichungen (XXVII c und d) nur Näherungen für Vorgänge, bei welchen die Beschleunigung so gering ist, daß die räumliche Veränderlichkeit der Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. Man bezeichnet solche Vorgänge, bei denen der innere Zustand des Körpers noch derselbe wie bei stationärer Bewegung ist, passend als „quasistationäre". Dieser Begriff entspricht durchaus dem in § 17, e) für bewegte Ladungsträger eingeführten.

Wir lassen nun die Voraussetzung des konstanten inneren Zustandes wieder fallen und führen dem Körper bei konstanter Geschwindigkeit pro Zeiteinheit die Wärmemenge R^0, bezogen auf das mitbewegte System, zu, verändern auch zugleich den Druck p^0. Die Funktion $E^0 + p^0 V^0$ ändert sich dabei um

*) D. h. so streng wie die Gleichung (IX a) der Elektronentheorie. Immerhin ist es wenig wahrscheinlich, daß eine etwa notwendig werdende Änderung der letzteren etwas an der Transformation der Kraftdichte, d. h. an der Möglichkeit, sie zur Viererkraft zu ergänzen, ändert.

$$\frac{d}{dt^0}(E^0 + p^0 V^0) = \frac{dE^0}{dt^0} + p^0 \frac{dV^0}{dt^0} + V^0 \frac{dp^0}{dt^0}.$$

Nach dem Energieprinzip, angewandt im System K^0, ist aber:

$$\frac{dE^0}{dt^0} + p^0 \frac{dV^0}{dt^0} = R^0;$$

also ist nach (XXVII c), (149 c), (153 a), (22) und (24):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt^0}\frac{dt^0}{dt} = \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\left(R^0 + V^0 \frac{dp^0}{dt^0}\right)\frac{dt^0}{dt}$$

$$= \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\left(R + V\frac{dp}{dt}\right).$$

Nach dem Impulssatz ist eine Impulszunahme nur möglich, wenn eine Kraft $\mathfrak{K}$ wirkt,

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\left(R + V\frac{dp}{dt}\right) \quad \cdots \quad (162)$$

Die in § 22 gefundene Tatsache, daß bei Wärmezufuhr zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit eine Kraft notwendig ist, findet ihre Erklärung somit in der Trägheit der Energie [2]).

c) Vergleich mit der klassischen Mechanik. Im Unterschied zur klassischen Mechanik ist der Impuls keine lineare Funktion der Geschwindigkeit; dies ist er nach (XXVII c) aber angenähert, solange q^2 gegen c^2 vernachlässigt werden kann. Deshalb dürfen wir die den Grenzfall $q = 0$ benutzende Definition (160 a) der Masse hier übernehmen. Diese Feststellung ist natürlich schon deshalb nicht auf den besonderen Fall allseitig gleichen Druckes beschränkt, weil der Einfluß der Spannungen auf die Trägheit für den empirischen Nachweis überhaupt zu klein ist und die klassische Mechanik deshalb völlig von ihm absieht. Mechanische und astronomische Beobachtungen vermöchten demnach dann erst zwischen dem Einsteinschen Relativitätsprinzip und der klassischen Mechanik zu entscheiden, wenn ihre Genauigkeit zum Nachweis von Gliedern mit dem Faktor q^2/c^2 ausreichte. Diese Bedingung ist in keinem einzigen Falle erfüllt. Aus der empirischen Gültigkeit der klassischen Mechanik läßt sich somit kein Einwand gegen die Relativitätstheorie herleiten.

Im engen Zusammenhang damit steht, daß die Abhängigkeit der Energie von der Geschwindigkeit ein anderes ist. Bisher trat als Folge der Bewegung die kinetische Energie $^1/_2 m q^2$ additiv zu der sonstigen hinzu. Auch dies ist hier nur als Näherung richtig. Entwickeln wir nämlich in (XXVII c) $\frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}$ nach steigenden Potenzen von q^2/c^2, so finden wir unter Vernachlässigung von $p^0 v^0$ [vgl. auch (160 b)]:

$$E = E^0 + {}^1/_2 q^2/c^2 E^0 + \cdots = E^0 + {}^1/_2 m q^2 + \cdots$$

Die kinetische Energie verliert daher ihre Bedeutung als besondere Energieart, und dies ist auch notwendig; denn führt man die Trägheit auf Energie zurück, so darf man nicht umgekehrt einen Teil der Energie auf Trägheit begründen. Nähert sich die Geschwindigkeit q der Lichtgeschwindigkeit c, so wachsen W und E ins Unendliche. Man kann deshalb durch keinen endlichen Energieaufwand jemals einen Körper bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigen. Hierin liegt die mechanische Erklärung dafür, daß die Lichtgeschwindigkeit die unerreichbare obere Grenze für alle Körpergeschwindigkeiten ist.

§ 26. Die Bedeutung der dynamischen Viererkraft F und die absoluten und relativen Spannungen.

Wir haben den Impulssatz schon in § 15 und § 25 in der Form

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

angewandt, dabei aber stets an Körper gedacht, bei welchen die mechanischen Spannungen keinen Beitrag an $\mathfrak{K}$ liefern. Wir müssen uns jetzt überlegen, wie sich die notwendige Verallgemeinerung nach der Grundgleichung (XVI) $F = -\mathit{div}\, T$ ergibt.

Wenden wir diese auf die räumlichen Komponenten an, so finden wir zunächst analog zu (95 a):

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{div}\, \boldsymbol{p} - \dot{\mathfrak{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

also z. B.:

$$\mathfrak{F}_x = -\mathfrak{div}_x \boldsymbol{p} - \dot{\mathfrak{g}}_x.$$

Nach ϱ' können wir dies aber umformen in:

$$\mathfrak{F}_x = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_{xz}}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial (\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_z)}{\partial z} - \underline{\dot{\mathfrak{g}}}.$$

Nach (159) ist also:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{t} - \underline{\dot{\mathfrak{g}}} \quad \ldots\ldots \quad (163\,a)$$

Durch Integration über einen endlichen Teil eines bewegten Körpers folgt daraus nach ξ:

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F}\, dV = \int \mathfrak{t}_n\, d\sigma - \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (163\,b)$$

Bei einem rein elektromagnetischen Vorgang (z. B. bei einem Vorgang im Vakuum) ist nun die elektromagnetische Kraftdichte $\mathfrak{F}_e$ stets Null; die elektromagnetische Spannungskraft $-\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ und die elektromagnetische Trägheitskraft $-\dot{\mathfrak{g}}_e$ heben sich dabei auf. Ebenso haben wir die in (163) durch die Komponenten F_x, F_y, F_z der dynamischen Viererkraft F definierte dynamische Kraftdichte $\mathfrak{F}$ bei einem rein dynamischen Vorgang Null zu setzen; die mechanische Spannkraft $-\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ wird dabei durch die mechanische Trägheitskraft $-\dot{\mathfrak{g}}$ gerade kompensiert. Wir können die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$, oder, da sie für alle berechtigten Systeme gelten soll, die daraus folgende Beziehung

$$F = -\mathit{Div}\, T = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{XXVIII})$$

als die Grundgleichung für alle rein dynamischen Vorgänge bezeichnen. In Übereinstimmung damit steht, daß der Energiesatz nach (XXVIII) lautet:

$$ic F_l = \mathit{div}\, \mathfrak{S} + \dot{W} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (164)$$

Die aus (163a und b) mit $\mathfrak{F} = 0$ folgenden Gleichungen

$$\underline{\ddot{\mathfrak{g}}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int \boldsymbol{t}_n\, d\sigma \quad \ldots\ldots \quad (165)$$

zeigen, daß die auf die materielle Fläche $d\sigma$ von den Spannungen ausgeübte Kraft sich aus dem unsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{t}$ der relativen Spannungen berechnet. Gleichung (163) (mit $\mathfrak{F} = 0$) entspricht der Eulerschen, (165)

der Lagrangeschen Form der hydrodynamischen Grundgleichungen. Im Falle, daß die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ in die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ fällt, wird auch der Tensor t symmetrisch; denn dann ist [vgl. (155)] z. B.:

$$t_{xy} - t_{yx} = \mathfrak{g}_y \mathfrak{q}_x - \mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_y = [\mathfrak{q}\mathfrak{g}]_z = 0.$$

Nach (161) tritt dieser Fall nur dann ein, wenn p^0_{xy} und p^0_{xz} verschwinden, wobei x die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ ist. Für kleine Werte von q/c ist aber in allen Fällen $t_{xy} - t_{yx}$ usw. von der Größenordnung q^2/c^2 [ebenfalls nach (161)]; in Übereinstimmung damit läßt sich aus (XXVII) folgern, daß das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]$ klein von der zweiten Ordnung ist. Abgesehen von solchen Größen gelten demnach die Verhältnisse der klassischen Mechanik, in denen der Tensor der relativen Spannungen (von den absoluten ist dort überhaupt nie die Rede) symmetrisch ist.

Bei Vorgängen, die nicht rein dynamisch sind, sondern bei denen auch noch elektromagnetische, Gravitations- oder sonstige noch unbekannte Kräfte mitspielen, tritt an die Stelle von (165):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int \mathfrak{t}_n d\sigma + \Sigma' \mathfrak{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165\,a)$$

wo in Σ' über die genannten Kräfte zu summieren ist. Nach (163 b) können wir dies umschreiben in $\Sigma \mathfrak{K} = 0$, wenn in $\Sigma \mathfrak{K}$ auch noch die dynamische Kraft aufgenommen wird. Daher ist die Gleichung $\Sigma \mathfrak{F} = 0$, oder vierdimensional geschrieben

$$\Sigma F = -\mathit{div}(\Sigma T) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XXVIII a})$$

die allgemeinste Formulierung des Energie- und Impulssatzes. Der Energiesatz lautet nämlich danach:

$$\Sigma \dot{W} + \mathit{div}(\Sigma \mathfrak{S}) = 0,$$

der Impulssatz:

$$\Sigma \dot{\mathfrak{g}} + \mathfrak{div}(\Sigma \boldsymbol{p}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165\,b)$$

Hier bietet sich nun auch Gelegenheit, die wichtige, in § 24 durch Transformation gewonnene Beziehung (XXVI) noch einmal auf eine andere Art zu beweisen. Die auf ein materielles Flächenstück $d\sigma$ wirkende Kraft ist $\mathfrak{t}_n d\sigma$; ihre Leistung ist daher $(\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n) d\sigma$. Nach dem Energieprinzip muß bei einem rein dynamischen Vorgange die Zunahme der Energie im Körper

$$\frac{dE}{dt} = \int (\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n) d\sigma$$

sein. Wenden wir diese Gleichung auf das Element dV an, so ist nach ϱ, ϱ' und o:

$$\frac{dE}{dt} = \underline{\underline{\dot{W}}} dV = \big(\dot{W} + div\,(W\mathfrak{q})\big)\,dV,$$

$$\int (\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}_n)\,d\sigma = -div\Big\{[\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}] - \big[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\big]\Big\}\,dV,$$

also:

$$\dot{W} = -div\Big\{W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}] - \big[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\big]\Big\}.$$

Der Vektor, dessen Divergenz rechts steht, muß aber der Energiestrom $\mathfrak{S}$ sein. Daraus folgt nach δ in Übereinstimmung mit (XXVIa):

$$c^2\mathfrak{g} = \mathfrak{S} = W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}] - \big[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\big] = W\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}] - \mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}\,\mathfrak{q}^2.$$

Ferner ist nach (165a) der gesamte Drehimpuls

$$\Sigma\,\mathfrak{L} = \Sigma \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\,dS$$

jedes nach außen abgeschlossenen Systems zeitlich unveränderlich; denn es folgt daraus:

$$\frac{d}{dt}\Sigma\,\mathfrak{L} = \Sigma \int [\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{g}}]\,dS = -\Sigma \int [\mathfrak{r}, div\,\mathfrak{p}]\,dS = +\int \Sigma\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{p}_n]\,d\sigma.$$

In dem letzten Integral ist über die gesamte Oberfläche zu integrieren; an dieser muß aber, wenn das System abgeschlossen sein soll, jedes $\mathfrak{p}_n$ verschwinden; also ist in der Tat $\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = 0$. Wenden wir dies auf das Universum an, so müssen wir annehmen, daß bei unendlich großen Entfernungen die $\mathfrak{p}_n$ mindestens wie $1/R^3$ abnehmen.

Eine Invariante der Lorentz-Transformation ist nach § 13 die Summe der Diagonalkomponenten des Tensors T,

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll}.$$

Deuten wir diese Invariante mechanisch, so wird sie [vgl. auch (159)]:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - W = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} - \big(W - (\mathfrak{q}\,\mathfrak{g})\big).$$

Herrscht ein allseitig gleicher Druck, so ist $t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = 3p$ nach (161a) eine und $(W - (\mathfrak{q}\,\mathfrak{g})$ eine zweite Invariante.

§ 27. Beispiele für die quasistationäre, adiabatische, isopiestische Dynamik.

a) Der Massenpunkt. Wir wollen in diesem Paragraphen von Körpern reden, die durch eine Kraft $\mathfrak{K}$ bei konstantem inneren Zustande (E^0, p^0, V^0) beschleunigt werden. Wir setzen zunächst voraus, daß sie unter einem allseitig gleichförmigen (relativen) Druck p stehen. Dann ist in (165a)

$$\int t_{nx}\, d\sigma = p \int \cos nx\, d\sigma = 0,$$

also auch der Vektor $\int t_n\, d\sigma = 0$, somit $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$; für den Impuls $\mathfrak{G}$ können wir den Wert aus (XXVIIc) einsetzen. Die diesen Gleichungen zugrunde liegende Bedingung räumlich konstanter Geschwindigkeit ist bei gleichen Beschleunigungen offenbar um so genauer erfüllt, je kleiner der Körper ist. Wendet man sie an, so behandelt man ihn daher als Massenpunkt; für einen solchen müßte das Folgende streng gelten.

Die auf $\mathfrak{G}$ bezügliche Gleichung unter (XXVIIc) hat die Form:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{q} f(q^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (166)$$

wobei

$$f(q^2) = \frac{E^0 + p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

ist. Zunächst machen wir aber von dieser Kenntnis über die Funktion $f(q^2)$ keinen Gebrauch, sondern folgern aus (166), da

$$\frac{dq^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{q}_x^2 + \mathfrak{q}_y^2 + \mathfrak{q}_z^2\right)$$

$$= 2\left(\mathfrak{q}_x \frac{d\mathfrak{q}_x}{dt} + 2\,\mathfrak{q}_y \frac{d\mathfrak{q}_y}{dt} + \mathfrak{q}_z \frac{d\mathfrak{q}_z}{dt}\right) = 2\,(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})$$

ist:

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \dot{\mathfrak{q}} f(q^2) + 2\,\mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})\, f'(q^2) \quad \ldots \quad (168)$$

f' ist die Derivierte von f.

Wir zerlegen nun Kraft und Beschleunigung in drei zueinander senkrechte Komponenten. Die ersten, $\mathfrak{K}_l$ und $\dot{\mathfrak{q}}_l$, sollen in die Richtung der Geschwindigkeit fallen, die zweiten, $\mathfrak{K}_t$ und $\dot{\mathfrak{q}}_t$,

in die durch Geschwindigkeit und Kraft bestimmte Ebene, während die dritten, $\mathfrak{K}_s$ und $\dot{q}_s$, senkrecht auf dieser stehen. $\mathfrak{K}_s$ ist natürlich 0. Die Anwendung von (168) auf diese Komponenten liefert dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_l &= \dot{q}_l \left[f(q^2) + 2\,q^2 f'(q^2) \right] = \dot{q}_l \frac{\partial G}{\partial q} \\ \mathfrak{K}_t &= \dot{q}_t f(q^2) = \dot{q}_t \frac{G}{q}, \quad \dot{q}_s = 0 \end{aligned}\right\} \quad (168\,a)$$

Nennt man den Proportionalitätsfaktor zwischen den zur Geschwindigkeit parallelen Komponenten von Kraft und Beschleunigung die longitudinale, den entsprechenden Faktor für die dazu senkrechten Komponenten die transversale Masse (m_l und m_t), so findet man aus (168a):

$$m_l = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad m_t = \frac{G}{q} \quad \ldots\ldots (169)$$

Im vorliegenden Falle nach (167) somit:

$$m_l = \frac{c(E^0 + p^0 V^0)}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}, \quad m_t = \frac{E^0 + p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \quad (169\,a)$$

Die Beschleunigung liegt also in derselben Ebene, wie die Geschwindigkeit und die Kraft, hat aber keineswegs die Richtung der letzteren, sondern liegt näher als sie an der Normalen auf der Geschwindigkeit, da

$$\left|\frac{\dot{q}_t}{\dot{q}_l}\right| = \frac{c^2}{c^2 - q^2} \left|\frac{\mathfrak{K}_t}{\mathfrak{K}_l}\right| > \left|\frac{\mathfrak{K}_t}{\mathfrak{K}_l}\right|$$

ist. Im Grenzfall $q = 0$ werden beide Massen zur Ruhmasse

$$m = \frac{1}{c^2}(E^0 + p^0 V^0) \quad \ldots\ldots (169\,b)$$

in Übereinstimmung mit (160b). Das Energieprinzip findet man aus (168) durch skalare Multiplikation mit q. Nämlich im allgemeinen

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}) = (\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})\left[f(q^2) + 2\,q^2 f'(q^2)\right]$$

und in dem vorliegenden Falle nach (167) und (XXVIIc), da p konstant ist:

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}) = \frac{c\,(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}\,(E^0 + p^0 V^0) = \frac{dE}{dt} + p\,\frac{dV}{dt} \quad \cdot \quad (170)$$

$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{K})$ ist die Leistung der Kraft $\mathfrak{K}$ bei der Beschleunigung, $-p\,\frac{dV}{dt}$ die Leistung des Druckes p bei der gleichzeitig stattfindenden Kompression. (170) stimmt daher in der Tat mit dem Energiesatz überein.

b) Die Dynamik einer elektrisch geladenen Kugel. Ein Körper habe bei Ruhe Kugelgestalt; seine elektrische Ladung e sei gleichmäßig über die Oberfläche verteilt. Wir bezeichnen den Radius mit a, mit $\mathfrak{G}$ und E den mechanischen Impuls und die Energie, mit $\mathfrak{K}$ die auf sie wirkende nichtmechanische Kraft, abgesehen von der Eigenkraft $\mathfrak{K}_e$, welchen ihr eigenes elektromagnetisches Feld auf sie ausübt.

Außer dieser Kraft $\mathfrak{K}_e$ übt aber das Feld einen gleichförmigen Zug (negativen Druck) aus, den wir am einfachsten berechnen, wenn wir das mit der Kugel bewegte System K^0 benutzen.

Nach der Definition der quasistationären Vorgänge können wir nämlich die Bestimmungsstücke des inneren Zustandes unter der Annahme berechnen, daß die Kugel in K^0 dauernd ruht. Dann aber ist ihr Feld rein elektrostatisch, im Innern von der Stärke Null, während nach außen die Kraftlinien senkrecht von der Oberfläche ausgehen. Die Oberfläche erfährt infolgedessen einen Zug nach außen, der pro Flächeneinheit gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{E}^{0^2}$ ist*); $|\mathfrak{E}^0|$ aber ist gleich der Flächendichte $\varrho_\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$. Dieser Zug muß aufgehoben werden durch einen (negativen) Druck im Innern der Kugel**) vom Betrage

$$p^0 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{0^2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 a^4} = -\frac{1}{3}\frac{E_e^0}{V^0} \quad \cdot \quad \cdot \quad (171)$$

denn es ist $V^0 = \frac{4\pi}{3}a^3$, $E_e^0 = \frac{e^2}{8\pi a}$ (vgl. § 17 d).

*) In Richtung einer Kraftlinie im leeren Raum herrscht nach (X) nämlich ein Zug, senkrecht dazu ein Druck vom Betrage $\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2$.

**) Dieser Schluß ist zwar nicht zwingend, weil der Spannungstensor p^0 durch die Oberflächenkräfte nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Unbestimmtheit hat aber keinen Einfluß auf das Ergebnis, wie die Betrachtung unter d) zeigt.

Der Impulssatz ergibt:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}_e \quad \cdots\cdots\cdots (172)$$

Nun haben wir aber in § 18 [Gleichung (128 b)] gesehen, daß bei quasistationärer Beschleunigung die Kraft

$$\mathfrak{R}_e = -\frac{d\mathfrak{G}_e}{dt}$$

ist, wobei nach (113)

$$\mathfrak{G}_e = \frac{4}{3}\frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E_e^0$$

den elektromagnetischen Impuls des Feldes bedeutet. Demnach können wir (172) ersetzen durch die Beziehung:

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e) \cdots\cdots (172\,a)$$

Dabei ist analog zu (166)

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e = \mathfrak{q} f(q^2),$$

wenn man

$$f(q^2) = \frac{E^0 + p^0 V^0 + {}^4/_3 E_e^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}}$$

setzt. Die Dynamik der geladenen Kugel ist somit völlig identisch mit der des Massenpunktes, nur daß an die Stelle von $(E^0 + p^0 V^0)$ der Ausdruck

$$E^0 + p^0 V^0 + {}^4/_3 E_e^0 = E^0 + E_e^0 \cdots (173)$$

[nach (171)] tritt. So ist nach Analogie von (169 a) die longitudinale und die transversale Masse

$$m_l = \frac{c(E^0 + E_e^0)}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}, \quad m_t = \frac{E^0 + E_e^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \cdots (174)$$

ferner die Ruhmasse

$$m = \frac{1}{c^2}(E^0 + E_e^0) = \frac{1}{c^2}\left(E^0 + \frac{e^2}{8\pi a}\right) \cdots (174\,a)$$

Der Energiesatz lautet nach Analogie zu (170):

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{R}) = \frac{c\,(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}(E^0 + E_e^0) \quad \cdots\cdots (175)$$

Nach (XXVII c) und (171) ist aber:

$$E = \frac{c^2 E^0 - {}^1/_3\, q^2 E_e^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \cdots\cdots (175\,a)$$

und nach (113):

$$E_e = \frac{c^2 + {}^1/_3\, q^2}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E_e^0,$$

also

$$E + E_e = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}(E^0 + E_e^0),$$

somit wird aus (175):

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{R}) = \frac{d}{dt}(E + E_e) \quad \cdots\cdots (175\,b)$$

wie es sein muß, da die Arbeit $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{R})$ teils die mechanische, teils die elektromagnetische Energie steigert.

Als elektrisch geladene Kugel fassen viele zurzeit das Elektron auf [3]). Wir finden so (freilich unter der Einschränkung auf Oberflächenladung, was aber nicht wesentlich ist) diejenige Abhängigkeit der beiden Massen von der Geschwindigkeit, welche den Versuchen von Bucherer und Hupka (§ 2) entspricht. Auch bei der Dynamik des Elektrons steht die Relativitätstheorie in Übereinstimmung mit dem Experiment; doch mag nochmals darauf hingewiesen werden, daß das letztere wohl noch nicht ganz einwandfrei ausgeführt worden ist.

Man geht zurzeit in den Annahmen über das Wesen der Elektronen aber noch weiter, indem man ihre Trägheit als rein elektromagnetisch auffaßt, d. h. den mechanischen Impuls $\mathfrak{G}$ gleich Null setzt. Dies bedeutet nach (XXVII c) und (171), daß man

$$E^0 = -p^0 V^0 = {}^1/_3\, E_e^0$$

und die Ruhmasse nach (174 a)

$$m = \frac{4}{3\,c^2} E_e^0 = \frac{e^2}{6\,\pi\,c^2 a} \quad \cdots\cdots (174\,b)$$

setzt. Man muß also auch dann neben der elektromagnetischen Energie eine andersartige vom Betrage

$$E = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{3c} E_e^0$$

[vgl. (175a)] einführen (Abraham). Aus den experimentell bestimmbaren Werten des Elementarquantums e und des Verhältnisses $e:m$*) findet man nach (174b), daß der Radius des Elektrons von der Größenordnung 10^{-13} cm sein muß. Ein zwingender Grund zu jener Annahme liegt aber weder in der Dynamik des Elektrons noch in sonstigen Versuchen. Gibt man der nicht elektrischen Energie E einen größeren Wert, so findet man nach (174a) auch etwas größeres für den Radius a. Es liegt dieser Hypothese nur das Streben zugrunde, einem Dinge, dessen träge Masse 1600 mal kleiner ist, als die des leichtesten chemischen Atoms, auch eine Trägheit von ganz anderer Art zuzuschreiben, als der Materie. Im übrigen liegen unsere Kenntnisse über die Elektronen noch so in den Anfängen, daß ein abschließendes Urteil auf diesem Gebiete nicht möglich ist. — Die Stellung der Elektronentheorie zu diesen Fragen war eine wesentlich andere. Sie hatte keine Wahl, sondern mußte dem Elektron rein elektromagnetische Masse zuschreiben, um die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit zu erklären. Darin, daß die Relativitätstheorie hier noch viele Möglichkeiten [vgl. d)] offen läßt, liegt vielleicht ein Vorzug gegenüber jener.

c) Körper mit beliebigen Spannungen. Wesentlich verwickelter liegen die Verhältnisse bei einem beliebigen Spannungszustande. Nach (XXVII) liegen bei ihm die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ und deshalb im allgemeinen auch der Gesamtimpuls $\mathfrak{G}$ nicht in der Richtung der Geschwindigkeit. Was das für eine Folge für die gleichförmige Bewegung hat, können wir aus § 17, c) entnehmen. Dort wurde ein statisches elektromagnetisches Feld

*) e/m ergibt sich aus der Ablenkbarkeit der Elektronenstrahlen im elektrischen oder magnetischen Felde; das Elementarquantum e ist neuerdings auf viele verschiedene Arten in vortrefflicher Übereinstimmung zu $4{,}65 \cdot 10^{-10} \sqrt{4\pi}$ gefunden worden, unter anderem so, daß man die elektrochemisch bestimmte Ladung des Grammatoms eines einwertigen Elektrolyten durch die Zahl der Atome im Grammatom dividiert.

gleichförmig verschoben, der elektromagnetische Drehimpuls $\mathfrak{L}$ änderte sich pro Zeiteinheit um $[\mathfrak{q}\mathfrak{G}_e]$ [Gleichung (111)], hier ändert sich daher, wie man an der Hand der dortigen Rechnung Schritt für Schritt nachprüfen kann, der mechanische Drehimpuls um $[\mathfrak{q}\mathfrak{G}]$. Jede Veränderung des Drehimpulses muß aber durch ein Drehmoment hervorgerufen sein. Im allgemeinen bedarf es also zur translatorischen Bewegung eines Körpers eines Drehmomentes $[\mathfrak{q}\mathfrak{G}]$. Der Begriff der Masse verliert damit jede Bedeutung. Man wird sogleich vermuten, und Abschnitt d) dieses Paragraphen wird bestätigen, daß beim Trouton-Nobleschen Versuch das Drehmoment der elektromagnetischen Kräfte gerade dem hier errechneten gleich ist[4]).

Völlig analog dazu ist das Drehmoment, welches in § 21 die planparallele Platte beim Durchgange des Lichtes erleidet. In beiden Fällen wird der Impuls $\mathfrak{G}$ seitlich verschoben, und dadurch der Drehimpuls verändert.

Bei einer quasistationären Beschleunigung muß im allgemeinen die Kraft auch dann eine transversale (zur Geschwindigkeit senkrechte) Komponente haben, wenn die Beschleunigung longitudinal ist; denn die transversale Komponente des Impulses $\mathfrak{G}$ [welche nach (XXVII d) zu q/c^2 proportional ist] ändert sich dabei ebenso wie die longitudinale.

Hier zeigt sich nun auch, aus welchem Grunde der Tensor t den elastischen Spannungen unsymmetrisch ist. Nach einer bekannten Betrachtung der Elastizitätslehre ist $(t_{xy} - t_{yx})\,dV$ die z-Komponente des Drehmoments, welches die Spannungen auf das parallelepipedische Volumelement dV des gespannten Körpers ausüben. In der klassischen Dynamik muß dies Null, daher t symmetrisch sein. In der Relativitätstheorie aber bedarf es der Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit dieses Volumelementes eines Drehmomentes $[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\,dV$. Infolgedessen muß

$$t_{xy} - t_{yx} = [\mathfrak{q}\mathfrak{g}]_z = \mathfrak{q}_x \mathfrak{g}_y - \mathfrak{q}_y \mathfrak{g}_x$$

sein, was mit (159) übereinstimmt.

d) Vollständiges statisches System. Alles dies vereinfacht sich bedeutend, sobald man die Dynamik eines vollständigen statischen Systems behandelt. Wir verstehen darunter ein solches, welches, für sich allein betrachtet, in einem berechtigten Bezugssystem K^0 im statischen Gleichgewicht ist, z. B. ein elektro-

statisches Feld mit Einschluß aller Ladungsträger. In jedem anderen System K, in welchem es eine gleichförmige Bewegung besitzt, macht, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die gesamte Energie, auch die etwa vorhandene elektromagnetische Energie (und die der Gravitation) diese mit. Infolgedessen können wir alle bisherigen Betrachtungen, von denen die genannten Energiearten zunächst ausgeschlossen waren, hier auf die Gesamtenergie anwenden.

Wir betrachten zunächt den Zustand dauernder Ruhe im Bezugssystem K^0. Da in ihm keine Energieströmung stattfindet, so ist auch die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ überall dauernd Null. Und daraus folgt nach (163) und (XXVIII), daß für jeden Querschnitt (gleichgültig ob eben oder nicht) des Systems

$$\int \mathfrak{p}_n^0 \, d\sigma^0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

sein muß. Ergänzen wir ihn nämlich durch eine ganz außerhalb des vollständigen Systems verlaufende Fläche zu einer geschlossenen Fläche, so können wir für das eingeschlossene Volumen nach (165b) schließen:

$$\int \mathfrak{g}^0 \, dS^0 = -\int \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}^0 \, dS^0 = \int \mathfrak{p}_n^0 \, d\sigma^0 = 0;$$

der Anteil jener Ergänzung am Oberflächenintegral verschwindet aber nach Voraussetzung allein für sich.

Wählen wir den Querschnitt als Ebene $x^0 = const$ (die x^0-Richtung ist dabei ganz willkürlich), so finden wir aus (176) und v':

$$\int \mathfrak{p}_{nx^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0x^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = 0$$

$$\int \mathfrak{p}_{ny^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0y^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = 0$$

usw. Multiplizieren wir diese Gleichungen mit dx^0, und integrieren wir dann über das ganze Volumen V^0 des vollständigen Systems, so folgt:

$$\int \boldsymbol{p}_{x^0x^0}^0 \, dV^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0y^0}^0 \, dV^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0z^0}^0 \, dV^0 = 0,$$

oder da das Entsprechende für alle anderen Komponenten des Tensors $\boldsymbol{p}^0$ gilt:

$$\int \boldsymbol{p}^0 \, dV^0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176a)$$

Für ein vollständiges statisches System gehen somit die Gleichungen (XXVIId) über in:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} E^0, \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E^0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (176\,\mathrm{b})$$

Ihre Übereinstimmung mit (XXVIIc) (wenn man dort den Druck $p^0 = 0$ setzt) beweist: Jedes vollständige statische System verhält sich bei quasistationärer Beschleunigung wie ein Massenpunkt.

Auch das Elektron mit seinem Feld ist ein System der genannten Art; daher lehrt dies Ergebnis: Man kann aus Versuchen über quasistationäre Beschleunigungen des Elektrons niemals einen Rückschluß ziehen auf seine Gestalt und Ladungsverteilung sowie über den Anteil des elektromagnetischen Impulses am Gesamtimpuls. Über seine Dimensionen läßt sich nur das folgern, daß sie nicht kleiner als 10^{-13} cm sein können; denn anderenfalls wäre die elektrostatische Energie E_e^0 und die Ruhmasse $m = 1/c^2 \cdot E^0$ größer, als sich mit den Beobachtungen verträgt. (Im letzten Satz ist allerdings angenommen, daß die Maxwellsche Theorie auch in den kleinsten Räumen streng richtig ist und daß die nichtelektromagnetische Masse nie negativ werden kann; ob diese Annahme zutrifft, mag dahingestellt bleiben.)

Ferner ergibt sich z. B., daß die Korpuskeln der α-Strahlung des Radiums denselben dynamischen Gesetzen gehorchen, wie die Elektronen. Da es sich bei ihnen zweifellos um materielle (Helium?) Atome handelt, wäre eine experimentelle Entscheidung zwischen der klassischen Mechanik und der Relativitätstheorie an ihnen besonders wichtig. Vorläufig dürften dem freilich unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Hoffen wir, daß der rastlos fortschreitenden Experimentierkunst auch hier bald der Erfolg glückt.

Ein vollständiges statisches System ist ferner der Kondensator des Trouton-Nobleschen Versuches mit seinem Feld. Gleichung (176b) zeigt, daß der gesamte Impuls stets in die Richtung der Geschwindigkeit fällt, so daß die Änderung des gesamten Drehimpulses $[\mathfrak{q}, \mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e]$ verschwindet.

§ 28. Thermodynamik.

a) Transformation der Entropie. Um nun auch noch die Thermodynamik dem Relativitätsprinzip anzupassen, müssen wir vor allem untersuchen, wie sich ihr wichtigster quantitativer Begriff, die Entropie, zur Lorentz-Transformation verhält. Obwohl schlechthin jedem physikalischen System eine bestimmte Entropie zukommt, beschränken wir uns hier im allgemeinen auf Gleichgewichtszustände. Auch bei Zustandsänderungen soll sich jeder durchlaufene Zustand nur äußerst wenig von einem Gleichgewicht unterscheiden, so daß die Veränderung umkehrbar vor sich geht. Wir beschränken uns ferner auf rein translatorische Bewegung und auf den Fall, daß der Spannungszustand ein allseitig gleicher Druck p ist. Ein Körper hat dann fünf Bestimmungsstücke; nämlich drei thermodynamische, den absoluten Wert der Geschwindigkeit und etwa Volumen und Temperatur, und außerdem zwei die Richtung der Geschwindigkeit bestimmende Winkel. An Stelle des absoluten Wertes der Geschwindigkeit und der Richtungswinkel führt man natürlich besser ihre drei Komponenten ein.

Den zweiten Hauptsatz, daß die Entropie aller an einem Prozeß beteiligten Systeme nur zunehmen kann, setzten wir dem Relativitätsprinzip zufolge als für alle berechtigten Bezugssysteme gültig an. In jedem berechtigten Bezugssystem K gilt somit der Schluß, daß in einem abgeschlossenen physikalischen System ein umkehrbarer Vorgang die Entropie unverändert läßt. Wir denken uns nun einen Körper, aus dem Zustand 1, in welchem er im System K ruht und die Entropie S_1 hat, adiabatisch-isopieistisch in den Zustand 2 gebracht, in welchem er die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ und die Entropie S_2 besitzt. Diese Beschleunigung ist zweifellos umkehrbar, so daß die gesamte Entropie des beschleunigten und des ihn beschleunigenden Körpers konstant bleibt. Stellen wir uns den letzteren ruhend vor, so wissen wir aus der klassischen Thermodynamik (die wir auf ruhende Körper unbedenklich anwenden können), daß seine Entropie durch die Leistung der Beschleunigungsarbeit nicht verändert wird, daher gilt dasselbe für die des beschleunigten Körpers, d. h. es ist $S_2 = S_1$. Der letztere gerät nun bei dem beschriebenen Vorgang in den Ruhezustand, bezogen auf ein System K', welches die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \mathfrak{q}$

gegen K hat, und zwar ist der Zustand 2 bezogen auf K' genau derselbe, wie der Zustand 1 bezogen auf K, da der innere Zustand bei einer adiabatisch-isopieistischen Beschleunigung konstant bleibt. Also ist $S_2' = S_1 \rightrightarrows S_2$, und da wir als Zustand 2 schlechthin jeden wählen können, so gilt:

$$S = S' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XIX)$$

Die Entropie ist eine Invariante der Lorentz-Transformation (Planck).

Der angegebene Beweis bezog sich zunächst nur auf Gleichgewichtszustände. Die allgemeinste Definition der Entropie beruht aber auf ihrem Zusammenhange mit der Wahrscheinlichkeit (Boltzmann), wobei die letztere durch die Zahl aller derjenigen Komplexionen bestimmt ist, welche einen und denselben thermodynamischen Zustand ergeben. Daß deren Abzählung für verschiedene berechtigte Systeme zu verschiedenen Resultaten führt, ist schon deshalb ausgeschlossen, weil es sich dabei, genau genommen, stets um ganze Zahlen handelt — nur wird durch die Benutzung von Näherungswerten diese Tatsache verdunkelt — und weil andererseits jede von der Relativgeschwindigkeit zweier Systeme abhängige physikalische Größe eine stetige Funktion davon sein muß. Der Satz von der Invarianz der Entropie muß also allgemein gelten *).

b) Transformation der Temperatur. Die Temperatur T definiert man bekanntlich durch die Festsetzung, daß bei einer umkehrbaren Zuführung der unendlich kleinen Wärmemenge Q

$$dS = Q/T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

sein soll. Wir übernehmen sie aus der klassischen Thermodynamik nicht nur für ruhende Körper, d. h. bezogen auf das mit der Materie bewegte System K^0, sondern ganz allgemein. Nun haben wir schon in § 22, Gleichung (153a) abgeleitet, daß sich die pro Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge R nach der Formel

$$R/R^0 = 1 - q^2/c^2$$

*) Wendet man ihn auf ein Strahlenbündel an, so findet man (wohl auf dem kürzesten Wege) das Wiensche Verschiebungsgesetz.

umrechnet; die während eines infinitesimal kurzen Vorganges zugeführte ist aber $Q = R\,dt$, somit ist, da nach (22)

$$dt = dt^0 : \sqrt{1 - q^2/c^2},$$

$$\frac{Q}{Q^0} = \frac{R\,dt}{R^0\,dt^0} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \quad \cdots\cdots (178)$$

Setzt man aber

$$dS = dS^0 = \frac{Q}{T} = \frac{Q^0}{T^0},$$

so findet man aus (178):

$$\frac{T}{T^0} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c},$$

so daß die Transformationsformel für die Temperatur lautet:

$$\frac{T}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{T'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{T^0}{c} \quad \cdots\cdots (XXX)$$

Die Temperatur transformiert sich also wie das Volumen, sie ändert sich daher auch wie das letztere in demselben Bezugssystem, wenn man den Körper adiabatisch und bei konstantem Druck aus der Ruhe heraus beschleunigt, d. h. sie sinkt dabei auf das $\sqrt{1 - q^2/c^2}$fache der Anfangstemperatur. Dies sehr paradoxe Ergebnis hängt auf das engste mit der in Gleichung (178) implizite steckenden Trägheit der Energie zusammen.

c) Bestätigung von (XXX). Um dies zu veranschaulichen, denken wir uns den folgenden Kreisprozeß bei konstantem Druck ausgeführt. Ein beliebiger Körper befinde sich im Zustand a in Ruhe auf der Temperatur T_1. Wir führen ihm aus einem ruhenden Wärmebehälter isotherm die Wärmemenge Q_1 zu, wodurch er in den Zustand b kommt. Dann beschleunigen wir ihn adiabatisch auf die Geschwindigkeit q (Zustand c); die Temperatur wird dabei T_2. Sodann führen wir ihm aus einem mitbewegten Wärmebehälter isotherm die (negative) Wärmemenge Q_2 zu (Zustand d), welche so bemessen ist, daß er zuletzt bei adiabatischer Verminderung der Geschwindigkeit bis zum Werte Null gerade wieder in den Zustand a gerät.

War im Zustand a seine Energie E_a und sein Volumen V_a, so ist es im Zustand b nach dem Energieprinzip:

$$E_b + pV_b = E_a + pV_a + Q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

im Zustand c ist nach (XXVII c), da $E_b + pV_b$ an die Stelle von $E^0 + pV^0$ tritt,

$$E_c + pV_c = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}(E_b + pV_b) \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (180)$$

so daß zur Beschleunigung die Arbeitsleistung

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (E_c + pV_c) - (E_b + pV_b) \\ &= (E_c + pV_c)\left(1 - \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\right) \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (180\,a)$$

aufzuwenden ist. Bei der isothermen und isopieistischen Zuführung der Wärmemenge Q_2 wächst aber, da die Geschwindigkeit konstant gehalten wird, wegen der Trägheit der Energie zugleich der Impuls, so daß nach (162) eine Kraft $\mathfrak{R}$ auf ihn ausgeübt und somit eine Arbeit geleistet werden muß, deren Betrag gleich

$$A_2 = \int_c^d (q\,\mathfrak{R})\,dt = \frac{q^2}{c^2 - q^2}\int_c^d R\,dt = \frac{q^2}{c^2 - q^2}\,Q_2 \cdot \cdot \quad (181)$$

ist. Infolgedessen ist im Zustand d

$$\left.\begin{aligned} E_d + pV_d &= E_c + pV_c + Q_2 + A_2 \\ &= E_c + pV_c + \frac{c^2}{c^2 - q^2}\,Q_2 \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \quad (181\,a)$$

Endlich ist bei der adiabatischen Verminderung der Geschwindigkeit analog zu (180a) die (negative) Arbeitsleistung

$$A_3 = (E_d + pV_d)\left(\frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} - 1\right) \cdot \cdot \cdot \cdot (181\,b)$$

erforderlich.

Nach dem ersten Hauptsatz muß die Summe der zugeführten Wärme- und Arbeitsquanten

$$Q_1 + Q_2 + A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

sein. Nach (180 a), (181 a) und (181 b) ist aber

$$A_1 + A_2 + A_3 = \left(\frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} - 1\right)\Big((E_d + p\,V_d) - (E_c + p\,V_c)\Big)$$

$$+ \frac{q^2}{c^2 - q^2}\,Q_2 = \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} - 1\right) Q_2.$$

Daher

$$Q_2 = -\,Q_1\,\frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz ist für jeden Kreisprozeß $\int dS = 0$, da der Körper in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Also nach (177) $\Sigma\,\frac{Q}{T} = 0$. Auf den vorliegenden Fall angewandt, zeigt dies, daß

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

somit

$$T_2 = T_1\,\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$$

ist. T_2 ist aber die Temperatur, welche der Körper von der Anfangstemperatur T_1 bei adiabatisch-isopieistischer Beschleunigung auf die Geschwindigkeit q (bei der Überführung vom Zustand b in den Zustand c) annimmt. Wir bestätigen somit, daß die Temperatur bei einem solchen Vorgange im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} : 1$ sinkt. Weil infolge der Trägheit der Energie die beim beschriebenen Kreisprozeß vom Körper geleistete Arbeit $-(A_1 + A_2 + A_3)$ nicht Null ist, sondern ($Q_1 > 0$ vorausgesetzt) einen positiven, durch Wärmezufuhr gedeckten Betrag hat, muß nach dem zweiten Hauptsatz die Abgabe der Wärme $-Q_2$ bei niedrigerer Temperatur erfolgen als die Aufnahme von Q_1.

Es sei hier noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Transformationsformel (XXX) im Gegensatz zu (XXIX) nur für thermodynamische Gleichgewichtszustände gilt. Für einen Vorgang, der davon so weit abweicht wie ein Wärmestrahlenbündel, gilt ein ganz anderes Gesetz (v. Mosengeil).

d) Das dynamische Potential H. Ein zwar abgeleiteter, aber dennoch sehr wichtiger thermodynamischer Begriff ist die

freie Energie, welche wir für einen ruhenden Körper mit F^0 bezeichnen wollen. Bekanntlich ist

$$F^0 = E^0 - T^0 S^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (182)$$

Führt man als unabhängige Veränderliche das Volumen V^0 und die Temperatur T^0 ein, so gilt:

$$\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = \frac{\partial E^0}{\partial V^0} - T^0 \frac{\partial S^0}{\partial V^0}, \quad \frac{\partial F^0}{\partial T^0} = \frac{\partial E^0}{\partial T^0} - S^0 - T^0 \frac{\partial S^0}{\partial T^0}.$$

Andererseits ist

$$d S^0 = \frac{d E^0 + p^0 d V^0}{T^0},$$

also

$$\frac{\partial S^0}{\partial V^0} = \frac{1}{T^0}\left(\frac{\partial E^0}{\partial V^0} + p^0\right), \quad \frac{\partial S^0}{\partial T^0} = \frac{1}{T^0}\frac{\partial E^0}{\partial T^0}. \quad (183)$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = -p^0, \quad \frac{\partial F^0}{\partial T^0} = -S^0 \quad \ldots\ldots (183\,a)$$

Betrachten wir nun für einen bewegten Körper die Funktion:

$$H = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} H^0, \quad H^0 = -F^0 \quad \ldots \quad (184)$$

Ist hier F^0 als Funktion von V^0 und T^0 gegeben, so ist H als Funktion von q, V, T bestimmt, da sich aus V, T und q

$$V^0 = V\frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad T^0 = T\frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}$$

berechnen läßt. Und zwar findet man nach (184), (182), (183a), (161a) und (XXIX), da

$$\left(\frac{\partial V^0}{\partial q}\right)_V = \frac{q}{c^2 - q^2} V^0, \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial q}\right)_T = \frac{q}{c^2 - q^2} T^0$$

ist, durch leichte Umrechnung die folgenden Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,T} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\frac{\partial H^0}{\partial V^0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial V}\right)_q = -\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = p^0 = p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\frac{\partial H^0}{\partial T^0}\left(\frac{\partial T^0}{\partial T}\right)_q = -\frac{\partial F^0}{\partial T^0} = S^0 = S,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,v} = -\frac{q H^0}{c\sqrt{c^2-q^2}} + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\left[\frac{\partial H^0}{\partial V^0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial q}\right)_V + \frac{\partial H^0}{\partial T^0}\left(\frac{\partial T^0}{\partial q}\right)_T\right],$$

$$= \frac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}(F^0 + T^0 S^0 + p^0 V^0)$$

$$= \frac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}(E^0 + p^0 V^0),$$

Endlich ist

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,v} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,v}\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{q}_x} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,v}\cdot\frac{\mathfrak{q}_x}{q},$$

also schließen wir nach (XXVIIc) auf die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,T} = p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = S, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,V} = \mathfrak{G}_x \text{ usw.} \quad (185)$$

wo die Indizes die konstant zu haltenden Variablen angeben. Der Impulssatz $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ ergibt somit, angewandt auf die drei Koordinatenrichtungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_x, \quad \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_y, \\ \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots (186)$$

Formen wir schließlich den Ausdruck

$$\mathfrak{q}_x\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x} + \mathfrak{q}_y\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y} + \mathfrak{q}_z\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z} + T\frac{\partial H}{\partial T} - H$$

nach (182), (184), (185), (XXIX), (XXX) und (XXVIIc) um, so finden wir für ihn den Wert:

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{G}) + TS - H$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(\frac{q^2}{c^2}(E^0 + p^0 V^0) + \frac{c^2-q^2}{c^2}(T^0 S^0 + F^0)\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(E^0 + \frac{q^2}{c^2}p^0 V^0\right),$$

also ist nach (XXVIIc):

$$q_x \frac{\partial H}{\partial q_x} + q_y \frac{\partial H}{\partial q_y} + q_z \frac{\partial H}{\partial q_z} + T\frac{\partial H}{\partial T} - H = E \quad \cdot \cdot \quad (187)$$

aus dieser Gleichung bestimmt sich die Energie E, sobald man die Funktion H kennt. Wir nennen H das dynamische Potential.

e) Isotherm-isochore Dynamik. Als wir in § 28 den Wert (XXVIIc) für $\mathfrak{G}$ mit konstanten E^0, p^0, V^0 in die Impulsgleichung $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ einsetzten, erhielten wir die Grundgleichung der adiabatisch-isopieistischen Mechanik. Bestimmen wir hier nach (184) H aus der freien Energie F^0, so ergeben die Gleichungen (186), indem man auch bei der Zeitdifferentiation V, T konstant hält, die Grundlagen der isotherm-isochoren Dynamik. Während dort aber die Natur des Körpers nicht weiter in Betracht kam und wir z. B. für die transversale und longitudinale Masse universelle Funktionen der Geschwindigkeit fanden, ist hier die Dynamik wesentlich durch die für den Körper charakteristische freie Energie F^0 bedingt. Denn, wie schon die obige Rechnung zeigte, sind bei konstantem V und T, V^0 und T^0 und damit auch F^0 Funktionen der Geschwindigkeit. Bei kleinen Geschwindigkeiten macht sich diese Abhängigkeit allerdings nur in Größen zweiter Ordnung geltend [vgl. (25) und (XXX)]; vernachlässigt man daher q^2/c^2 gegen 1, so wird die isotherm-isochore mit der adiabatisch-isopieistischen Dynamik und beide mit der klassischen Mechanik identisch. — Außer den beiden genannten Arten der Dynamik kann man natürlich auch noch andere, z. B. eine isotherm-isopieistische aufstellen, indem man bei der Zeitdifferentiation in (186) T und p als konstant ansieht.

f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Zugleich sind die Beziehungen (185) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß das Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\int_1^2 (\delta H + A)\, dt = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (188)$$

gilt, wie es H. v. Helmholtz formuliert hat, auf dessen einschlägige Arbeiten wir hier verweisen müssen[1]). A ist dabei der unendlich kleine Zuwachs, welchen die Energie bei der Variation

einer der Koordinaten erfährt, mag er nun als äußere Arbeit oder in Form von Wärme erfolgen. Die Funktion

$$H(q_x, q_y, q_z, V, T)$$

vereinigt für bewegte Körper die Rollen des kinetischen Potentials im Hamiltonschen Prinzip der klassischen Mechanik und der freien Energie. Weil aber die Energie sich in der klassischen Dynamik additiv aus innerer und kinetischer Energie zusammensetzte, so zerfiel H bei Helmholtz auch in zwei Summanden, von denen der eine, von q unabhängige, die freie Energie, der andere, durch V und T unbeeinflußte, das kinetische Potential der Mechanik war. So blieb die Vereinigung ohne weitere Folgen; erst in der Relativitätstheorie, in welche Planck ihn eingeführt hat, wird dieser Helmholtzsche Gedanke fruchtbar [2]). Besonders verdient hervorgehoben zu werden, daß nach (25) sowie (184)

$$H dt = H^0 dt^0$$

ist. Die Wirkungsgröße

$$\int_1^2 H dt$$

ist daher eine Invariante der Lorentz-Transformation.

Man sieht an den Entwickelungen dieses Paragraphen, besonders an den Gleichungen (188) in Verbindung mit (184), daß der Einfluß der Bewegung der Körper auf die thermodynamischen Vorgänge nur von der zweiten Ordnung ist, er liegt damit weit unter der Grenze der erreichbaren Meßgenauigkeit. Entfällt daher einerseits jede Möglichkeit zu einer thermodynamischen Prüfung der Relativitätstheorie, so steht doch andererseits die empirische Gültigkeit der klassischen Thermodynamik nicht im Widerspruch zu ihr.

§ 29. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung.

Die Anwendbarkeit der im letzten Paragraphen abgeleiteten Formeln scheitert an der für die Körper meist recht unvollständigen Kenntnis der freien Energie F^0. Um so interessanter ist es, daß es ein nicht-materielles physikalisches System gibt, welches, wenn auch noch nicht verwirklicht, so doch zweifellos naturgesetzlich möglich ist, und dessen Verhalten wir mit aller

Vollständigkeit und Strenge angeben können. Es ist dies die Hohlraumstrahlung, wie sie sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz mit der Zeit in jedem von gleichmäßig temperierten Wänden umschlossenen Hohlraum einstellt, die sich aber auch, wenn sie sich einmal eingestellt hat, in einem von vollkommen spiegelnden Wänden umgebenen Raume erhält. Unter diesen Umständen wollen wir sie jetzt betrachten, wobei wir als Bezugssystem zunächst dasjenige System K^0 wählen, in welchem die Wände ruhen. Doch lassen wir vorläufig den Index 0 fort.

a) Die Hohlraumstrahlung in der Ruhe. Die Besonderheit der Hohlraumstrahlung unter allen elektromagnetischen Vorgängen besteht darin, daß es bei ihr weder ausgezeichnete Punkte noch Richtungen gibt. Dies ist natürlich nicht möglich, solange wir die momentanen Zustände betrachten; denn dann spielen wie bei jedem elektromagnetischen Vorgang die Richtungen der beiden Feldstärken eine besondere Rolle. Wohl aber gilt es für die Mittelwerte aller Größen, wenn wir diese über Zeiten bilden, welche gegen die Schwingungsperiode sehr groß sind. Es findet z. B. im Mittel keine Energieströmung statt, denn anderenfalls wäre ja deren Richtung ausgezeichnet. Dasselbe gilt von den Mittelwerten der Maxwellschen Spannungen, auch diese dürfen keine Richtungen besonders hervorheben, was nur dann der Fall ist, wenn im Mittel

$$p_{ys} = p_{sx} = p_{xy} = 0, \quad p_{xx} = p_{yy} = p_{ss} = p \quad . \quad (189)$$

ist, d. h. wenn ein allseitig gleicher Druck p herrscht.

Dessen Größe läßt sich nun leicht angeben. Wie aus (X) hervorgeht, gilt für die Momentanwerte die Gleichung:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{ss} = W;$$

bei der Mittelwertbildung muß diese bestehen bleiben. Mit Rücksicht auf (189) muß daher für den Mittelwert p gelten:

$$p = \tfrac{1}{3} W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189\,a)$$

Man kann diesen Druck übrigens auch als Ergebnis des Strahlungsdruckes aller die Wand treffenden Strahlenbündel auffassen und berechnen.

Die Hohlraumstrahlung besitzt wie alle Wärmestrahlung auch Entropie und Temperatur; da sie einen Gleichgewichts-

zustand darstellt, berechnet sich die erstere wie bei einem im Gleichgewichte befindlichen Körper nach der Differentialgleichung:

$$dS = \frac{dE + p\,dV}{T}.$$

Wir wollen aus dieser mit Hilfe von (189 a) S und E als Funktionen der Temperatur und des Volumens bestimmen. Wegen der Gleichwertigkeit aller Punkte sind beide Größen einfach zu V proportional, so daß die Energiedichte $W = \frac{E}{V}$ eine Funktion der Temperatur allein ist. Schreiben wir die letzte Gleichung in die Form:

$$\left.\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}\left(V\frac{dW}{dT}dT + (W+p)\,dV\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(V\frac{dW}{dT}dT + \tfrac{4}{3}W dV\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot (189\,b)$$

so sieht man, daß

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T}\frac{dW}{dT}, \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3}\frac{W}{T}$$

ist. Berechnet man aus jeder dieser Beziehungen $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$, so findet man:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{dW}{dT} = \frac{4}{3T}\left(\frac{dW}{dT} - \frac{W}{T}\right),$$

also

$$\frac{dW}{dT} = 4\frac{W}{T}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion W von T. Aus ihrer Integration folgt:

$$W = aT^4, \quad E = aT^4V \quad \ldots\ldots \quad (190)$$

wobei a die Integrationskonstante bedeutet; und setzt man diesen Wert in (189 b) ein, so findet man durch abermalige Integration:

$$S = \tfrac{4}{3}aT^3V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

Die additive Integrationskonstante haben wir hierbei fortgelassen, weil nach (190) mit der absoluten Temperatur auch die Energie, d. h. die Strahlung überhaupt verschwindet. Die freie Energie ist

$$F = E - TS = -\tfrac{1}{3}aT^4V \quad \ldots\ldots \quad (191\,a)$$

Gleichung (190) spricht das Stefan-Boltzmannsche Gesetz aus. Die Konstante a ist nach Valentiner

$$7{,}148 \cdot 10^{-15}\ [\mathrm{g\,cm^{-1}\,sec^{-2}\,grad^{-4}}].$$

b) Die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung. Nun betrachten wir die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung, legen also unseren Erörterungen ein anderes berechtigtes System zugrunde und zeichnen die bisherigen, auf das mitbewegte System K^0 bezogenen Größen F, T, S usw. durch den Index 0 aus. Dabei bleiben zwar nicht mehr alle Richtungen, wohl aber noch alle Punkte gleichwertig, da ja die Koordinaten selbst in die Transformationsformeln für die physikalischen Größen nicht eingehen. Die mittlere Energie der Strahlung macht also in diesem Falle, obwohl sie elektromagnetische Energie ist, die Bewegung mit, so daß wir alle unsere Betrachtungen auf sie anwenden können.

Aus (184) und (191) folgt für das dynamische Potential [vgl. auch (25) und (XXX)]:

$$\left.\begin{aligned} H = -\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} F^0 &= \frac{a}{3}\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} T^{0\,4} V^0 \\ &= \frac{a\,c^4}{3}\frac{T^4 V}{(c^2-q^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots (192)$$

also nach (185) und (187):

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,\,T} = \frac{a c^4}{3}\frac{T^4}{(c^2-q^2)^2}, \\ S &= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = \frac{4\,a c^4}{3}\frac{T^3 V}{(c^2-q^2)^2}, \\ E &= q\frac{\partial H}{\partial q} + T\frac{\partial H}{\partial T} - H = \frac{a c^4}{3}\frac{3c^2+q^2}{(c^2-q^2)^3} T^4 V \\ \mathfrak{G}_x &= \left(\frac{\partial H}{\partial q_x}\right)_{V,\,T} = \frac{4\,a c^4}{3}\frac{q_x}{(c^2-q^2)^3} T^4 V, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (193)$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\mathfrak{G} = \frac{4\,a c^4}{3}\frac{\mathfrak{q}}{(c^2-q^2)^3} T^4 V,$$

Durch diese Gleichungen ist die quasistationäre Dynamik der Hohlraumstrahlung vollkommen bestimmt.

c) Isotherm-isochore Dynamik. Wir wollen als Beispiel dafür die isotherm-isochore Beschleunigung untersuchen. Der Impuls ist hier wie in (166) als Funktion der Geschwindigkeit von der Form $\mathfrak{q} f(q^2)$. Daher können wir die Formel (169) für die longitudinale und transversale Masse anwenden:

$$m_l = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{4ac^4}{3} T^4 V \frac{c^2 + 5q^2}{(c^2 - q^2)^4},$$

$$m_t = \frac{G}{q} = \frac{4ac^4}{3} \frac{T^4 V}{(c^2 - q^2)^3}.$$

Die Abhängigkeit beider Massen von der Geschwindigkeit ist somit eine ganz andere wie bei der adiabatisch-isopieistischen Dynamik (169 a). Nur im Grenzfalle $\mathfrak{q} = 0$ verschwindet der Unterschied zwischen beiden Arten der Beschleunigung, denn dann ist nach (189 a) und (190) in Übereinstimmung mit (160 b) und (169 b) die Ruhmasse

$$m = \frac{4a}{3c^2} T^{04} V^0 = \frac{1}{c^2}(E^0 + p^0 V^0).$$

Ferner ist nach (193):

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{T,V} = \frac{16ac^4}{3} T^3 V \frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{(c^2 - q^2)^3};$$

vergrößert die Beschleunigung die Geschwindigkeit, ist also $(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}}) > 0$, so ist auch $\frac{dS}{dt} > 0$, und es muß eine Wärmemenge zugeleitet werden, die pro Zeiteinheit den Betrag

$$R = T\left(\frac{dS}{dt}\right)_{T,V} = \frac{16ac^4}{3} T^4 V \frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{(c^2 - q^2)^3}$$

hat. Um die Tendenz zur Temperaturerniedrigung zu überwinden, die nach § 29 mit der Geschwindigkeitsvergrößerung verbunden ist, muß bei der isotherm-isochoren Beschleunigung Wärme zugeführt werden. Die gesamte bei einer Beschleunigung von der Ruhe bis zur Geschwindigkeit q notwendige Wärme ist:

$$Q = \int R\,dt = T(S_q - S_0) = \frac{4a}{3} T^4 V \frac{q^2(2c^2 - q^2)}{(c^2 - q^2)^2}.$$

Der Druck steigt mit der Geschwindigkeit, da

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{T,V} = \frac{4ac^4}{3} T^4 \frac{(q\dot{q})}{(c^2 - q^2)^3}$$

im Vorzeichen mit $(q\dot{q})$ übereinstimmt.

Ebenso leicht kann man nach (193) die adiabatisch-isochore und die isotherm-isopieistische Dynamik aufstellen. Man hat nur q, S, V bzw. q, T, p als unabhängige Variable einzuführen. Qualitativ lassen sich diese Ergebnisse auf beliebige Körper übertragen.

d) Historische Bemerkungen. Die Gleichungen (193) enthalten in gewisser Beziehung auch eine Kontrolle unserer Betrachtungen. Die in ihnen enthaltene Dynamik der Hohlraumstrahlung läßt sich nämlich, wie der zu früh verstorbene K. von Mosengeil in seiner Dissertation gezeigt hat, aus der Elektrodynamik des Vakuums auch ohne explizite Benutzung des Relativitätsprinzips ableiten. Diese Arbeit spielt deswegen eine Rolle in der Geschichte der Wissenschaft, weil Planck zur Begründung der hier vorgetragenen Dynamik der bewegten Körper einen dynamisch völlig bekannten Probekörper brauchte; er konnte auf Grund der Mosengeilschen Dissertation dazu die Hohlraumstrahlung benutzen.

§ 30. Rückblicke und Ausblicke.

Um die Annahmen, welche in diesem Buche zugrunde gelegt sind, klar hervortreten zu lassen, werfen wir noch einen Rückblick auf sie. Wir haben in § 6 zunächst das Relativitätsprinzip an die Spitze gestellt, welches die Gleichwertigkeit einer dreifach unendlichen Schar von Bezugssystemen für alle Naturgesetze ausspricht. Aus einem hinreichend bekannten Naturgesetz (dem der Lichtfortpflanzung im leeren Raume) leiteten wir dann die Lorentz-Transformation ab, welche den Übergang von einem berechtigten System zu allen anderen ermöglicht und zugleich die Einsteinsche Kinematik enthält (§ 7). In § 14 konnten wir dann beweisen, daß die (über das Gesetz der Lichtfortpflanzung hinausgehende) Elektrodynamik des Vakuums durch die Lorentz-Transformation in sich selbst überführt wird. In § 15 traten als neue Annahmen die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses hinzu, eng verknüpft in Gleichung (XVI):

$$F = -\mathcal{A}iv\, T.$$

In Minkowskis Elektrodynamik der bewegten Körper wurde sodann die Maxwellsche Theorie für ruhende Körper zugrunde gelegt; nur unwesentlich im Ansatz der ponderomotorischen Kraft entsprechend der Überlegung modifiziert, daß alle Kräfte sich gegen die Lorentz-Transformation gleich verhalten müssen, und daß daher dem Energiestrom auch ein elektromagnetischer Impuls zugeordnet sein muß. Auf derselben Grundlage ließ sich auch die Dynamik der bewegten Körper aufbauen, doch enthielt der Verzicht auf gewisse an sich mögliche Zusätze bei der Deutung der Komponenten des Welttensors T als Energiestrom, Impulsdichte usw. eine neue Hypothese, deren physikalische Bedeutung in dem Satz von der Trägheit der Energie $\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}$ zutage trat, welche unter anderem die vollständige Zurückführung der mechanischen Trägheit auf die Energie und die Spannungen ermöglicht. In den beiden letzten Paragraphen haben wir schließlich noch den zweiten Hauptsatz hinzugezogen. Als physikalische Grundlage der Relativitätstheorie können wir hiermit bezeichnen: das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses, das Entropieprinzip, die Maxwellsche Elektrodynamik, sowie jene Deutung der Trägheit.

Sodann mag auf das durch die historische Entwickelung nahegelegte Mißverständnis hingewiesen werden, die Relativitätstheorie stände der Elektrodynamik näher als etwa der Mechanik. Wenn die Lorentz-Transformation aus der Betrachtung eines elektromagnetischen Vorganges abgeleitet wird, so geschieht dies allein aus dem Grunde, daß wir zunächst mechanische Naturgesetze nicht mit der erforderlichen Genauigkeit kennen, sonst könnten wir genau so gut ein solches dazu benutzen. Auch daß die Elektrizitätsmenge im Gegensatz zur Masse die wichtige Rolle einer Invarianten dieser Transformation spielt, weist keineswegs auf einen solchen Zusammenhang hin. Denkbar wären Theorien, die dem Relativitätsprinzip genügen und bei denen die Elektrizitätsmenge keine solche Invariante ist; sie brauchte dazu nur in einem und demselben berechtigten System keine durch Bewegung unveränderliche Größe zu sein. Tatsächlich steht das Relativitätsprinzip in demselben Sinne über allen Gebieten der Physik, wie etwa das Energieprinzip, und beansprucht ebenso wie dies, bei allen physikalischen Theorien ein Kriterium für

deren Zulässigkeit zu enthalten. Der einzige, zufällige Unterschied zwischen den beiden genannten Gebieten ist der, daß wir in der Elektrodynamik infolge der außerordentlich gesteigerten Genauigkeit der Meßmethoden diesen Nachweis führen können, in der Mechanik aber nicht.

Eng damit verknüpft ist der Irrtum, daß das gemeinsame Verhalten aller Kräfte gegen die Lorentz-Transformation auf einen gemeinsamen Ursprung von ihnen hinwiese, daß sich etwa alle auf elektrodynamische Kräfte zurückführen ließen. Die Frage, ob so etwas möglich ist, steht gänzlich außerhalb unserer Betrachtungen. Jene Gemeinsamkeit sagt nichts anderes aus, als daß das Relativitätsprinzip in allen Gebieten der Physik gilt; und dies müssen wir annehmen, wenn dies Prinzip mehr sein soll, als eine manchmal nützliche Rechnungsregel. Mehr daraus zu folgern, wäre so voreilig, als wenn man etwa aus der Allgemeingültigkeit des Energieprinzips schließen wollte, daß alle Naturvorgänge in letzter Linie mechanische sind. Überhaupt scheint die Vereinigung der beiden noch getrennten Gebiete der theoretischen Physik — Elektrodynamik und Mechanik — nicht durch Unterordnung des einen unter das andere erreichbar zu sein, sondern durch gleichmäßige Unterordnung beider unter höhere Gesetze. Daß wir hier nicht nur das Relativitätsprinzip auf beide anwenden, sondern auch die Begriffe Kraft, Impuls, Spannung, Energiedichte und -strömung in universelle Beziehungen zueinander setzen konnten, mag immerhin als ein Schritt in dieser Richtung betrachtet werden.

Die Trägheit haben wir auf Energie zugeführt. Erfahrungsgemäß sind mit ihr auf das engste die Gravitationswirkungen der Körper verknüpft, und damit kommen wir auf eine lange Reihe ganz unbeantwortbarer Fragen. Gewiß ist: Gilt das Relativitätsprinzip, so pflanzen sich die Gravitationswirkungen im leeren Raum mit der Lichtgeschwindigkeit c fort. Es gibt dann ferner im Gravitationsfeld eine bestimmte Energiedichte und einen Energiestrom, sowie einen Gravitationsimpuls und ebensolche Spannungen. Endlich kann das Newtonsche Attraktionsgesetz, welches unter anderem der Geschwindigkeit der Körper jeden Einfluß auf die Attraktion abspricht, keinenfalls mehr als eine Näherung für gegen c kleine Geschwindigkeiten, eine „Gravitationsstatik", enthalten. Wie aber werden sich die Energie-

und Impulsdichte aus den Feldgrößen bestimmen? Welcher Art werden diese Feldgrößen überhaupt sein? Wird man bei einer strengen Fassung des Gravitationsgesetzes den Begriff der ponderablen Masse beibehalten können, da doch die träge Masse als ein sehr sekundärer und nur in besonderen Fällen anwendbarer Begriff erkannt ist (§ 27)? Sodann ist die Trägheit keineswegs mehr eine Eigenschaft der Materie allein. Jeder Lichtstrahl besitzt Impuls. Beeinflußt er auch das Gravitationsfeld? Gehen etwa gar von dem Gravitationsimpuls selbst wieder Gravitationswirkungen aus? Das alles kann zurzeit niemand beantworten, und gerade der sonst so segensreiche Umstand, daß das Newtonsche Gesetz den Astronomen völlig ausreicht, setzt die Hoffnung auf eine Beantwortung in absehbarer Zeit auf ein Minimum herab. Die an sich sehr interessanten und scharfsinnigen Versuche von Poincaré [1]), Minkowski [2]), Sommerfeld [3]), das Attraktionsgesetz nach elektromagnetischen Analogien in einer dem Relativitätsprinzip gehorchenden Art zu verallgemeinern, entbehren leider jeder Möglichkeit eines Vergleiches mit der Erfahrung.

Da so außerordentlich viele Größen, denen zunächst eine absolute Bedeutung zuzukommen scheint, in der Relativitätstheorie diese abstreifen müssen, so wollen wir hier noch einmal die wichtigsten Invarianten der Lorentz-Transformation zusammenstellen. Von Raum-Zeitgrößen ist dies zunächst das $\iint dS\,dt$, genommen über einen bestimmten Weltbereich, von physikalischen Größen sind es die Elektrizitätsmenge, die Entropie und die Wirkungsgröße $\int_1^2 H\,dt$, ferner der Ausdruck

$$t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} - \big(W - (\mathfrak{q}\mathfrak{g})\big),$$

daneben auch, was aber von weniger allgemeiner Bedeutung ist, der allseitig gleiche, relative Druck p.

Stellen wir zum Schluß die Frage: Wie sicher ist die Relativitätstheorie begründet? So tiefgreifende Änderungen sie uns auch am physikalischen Weltbild vorzunehmen zwingt, logische Unmöglichkeiten enthält sie nirgends. Alle Paradoxien, auf die man gelegentlich gestoßen ist, haben sich stets bei näherer Betrachtung einwandfrei aufklären lassen, und man kann wohl

bestimmt voraussagen, daß dies auch in Zukunft stets möglich sein wird. Was ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung anbetrifft, so können wir sagen, daß ihr zurzeit keine einzige Beobachtung widerspricht, dagegen eine immerhin beträchtliche Zahl von Erfahrungen sie bestätigt, darunter auch solche, die den älteren Theorien unerklärlich waren. Immerhin scheint manchen ihr empirischer Beweis noch nicht hinreichend erbracht, und jedenfalls sind weitere Prüfungen außerordentlich wünschenswert. Was diese ergeben werden, muß die Zukunft lehren. Wie aber das Ergebnis sein mag, ein Verdienst kann die Einsteinsche Relativitätstheorie auf jeden Fall beanspruchen, daß sie nämlich die einzig mögliche konsequente Durchführung der einen Antwort auf die Relativitätsfrage bildet, die da behauptet: „Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem für die Naturgesetze, vielmehr eine dreifach unendlich Schar gegeneinander gleichförmig bewegter, völlig gleichberechtigter Systeme“. Wird sie in einem einzigen wesentlichen Punkte endgültig widerlegt, so ist eben dieser ihr Grundsatz falsch und der entgegengesetzte richtig. Jedenfalls aber führt die Relativitätstheorie zur endgültigen Entscheidung über diese unvergleichlich wichtige physikalische Frage.

Anhang.

a) Geometrische Bezeichnungen.

Das Koordinatensystem x, y, z ist stets rechtwinkelig und bildet ein Rechtssystem. Die Zeit nennen wir t; benutzen aber an ihrer Stelle oft die Größen $u = ct$ oder $l = ict$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, $i = \sqrt{-1}$ ist. Ein Linienelement bezeichnen wir mit ds, ein Flächenelement mit $d\sigma$, ein Raumelement mit dS; die Normale von $d\sigma$ ist n. Das Volumen eines Körpers nennen wir V, das Element davon, welches für die Lorentz-Transformation vom Raumelement dS zu unterscheiden ist, sonst aber manchmal mit ihm vertauscht werden kann, dV. Den Winkel zwischen zwei beliebigen Richtungen s und s' machen wir durch das Zeichen (ss') kenntlich.

b) Vektor- und Tensorbezeichnungen *).

Vektoren sind solche physikalischen Größen, die denselben Richtungscharakter besitzen wie eine gerichtete Strecke. Alle Vektoren und nur solche werden durch deutsche Buchstaben kenntlich gemacht; die Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ nach einer Richtung s wird durch $\mathfrak{A}_s$, sein absoluter Wert durch $|\mathfrak{A}|$ oder falls Zweideutigkeiten ausgeschlossen sind, durch A **), das Quadrat davon durch $\mathfrak{A}^2$ oder A^2 bezeichnet.

---

*) Ausführliche Darstellungen der Vektor- und Tensoranalysis sind z. B.: W. v. Ignatowski, Die Vektoranalysis; R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, beide Leipzig und Berlin 1909; ferner die ersten Abschnitte von Abraham-Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1904. Vgl. auch Enzyklop. d. mathem. Wiss. VI, 3, Art. 14 (M. Abraham).

**) E ist stets die Energie, niemals der absolute Wert der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$.

Eine Drehung des Achsenkreuzes ist durch die Beziehungen

$$x = a_1^{(1)} x' + a_2^{(1)} y' + a_3^{(1)} z', \quad x' = a_1^{(1)} x + a_1^{(2)} y + a_1^{(3)} z,$$
$$y = a_1^{(2)} x' + a_2^{(2)} y' + a_3^{(2)} z', \quad y' = a_2^{(1)} x + a_2^{(2)} y + a_2^{(3)} z,$$
$$z = a_1^{(3)} x' + a_2^{(3)} y' + a_3^{(3)} z', \quad z' = a_3^{(1)} x + a_3^{(2)} y + a_3^{(3)} z,$$

dargestellt, wenn dabei die „Orthogonalitätsbedingungen“

$$a_1^{(1)2} + a_2^{(1)2} + a_3^{(1)2} = 1, \quad a_1^{(2)} a_1^{(3)} + a_2^{(2)} a_2^{(3)} + a_3^{(2)} a_3^{(3)} = 0,$$
$$a_1^{(2)2} + a_2^{(2)2} + a_3^{(2)2} = 1, \quad a_1^{(3)} a_1^{(1)} + a_2^{(3)} a_2^{(1)} + a_3^{(3)} a_3^{(1)} = 0,$$
$$a_1^{(3)2} + a_2^{(3)2} + a_3^{(3)2} = 1, \quad a_1^{(1)} a_1^{(2)} + a_2^{(1)} a_2^{(2)} + a_3^{(1)} a_3^{(2)} = 0,$$

erfüllt sind. Dabei transformieren sich die Komponenten eines Vektors gemäß dessen Definition wie die Koordinaten selbst, d. h. diese Gleichungen bleiben richtig, wenn man x durch $\mathfrak{A}_x$ usw., x' durch $\mathfrak{A}_{x'}$ usw. ersetzt.

Aus einem Skalar φ leitet sich der Vektor *grad* φ ab, dessen Komponenten sind:

$$grad_x\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad grad_y\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad grad_z\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Als skalares Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir die Größe:

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z = |\mathfrak{A}||\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}),$$

als ihr Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ den Vektor mit den Komponenten:

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y,$$
$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_y = \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z,$$
$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_z = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x;$$

er steht auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht und ist seinem absoluten Betrage nach gleich $|\mathfrak{A}|.|\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})$. Den Skalar

$$div\, \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$$

nennen wir die Divergenz, den Vektor *rot* $\mathfrak{A}$ mit den Komponenten

$$rot_x\, \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}, \quad rot_y\, \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z},$$

$$rot_z\, \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}$$

nennen wir den Rotor des Vektors $\mathfrak{A}$. Durch Einsetzen dieser Definitionsgleichungen bestätigt man ohne weiteres die folgenden Rechnungsregeln:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = (\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) = (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

$$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}](\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - [\mathfrak{A}\mathfrak{C}](\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) - [\mathfrak{B}\mathfrak{C}].\mathfrak{A}^2 \quad . \quad (\varepsilon)$$

$$div(\varphi\mathfrak{A}) = \varphi\, div\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}\, grad\,\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

$$div[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B},\, rot\,\mathfrak{A}) - (\mathfrak{A},\, rot\,\mathfrak{B}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\vartheta)$$

$$div\, grad\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (\eta)$$

$$div(rot\,\mathfrak{A}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\iota)$$

$$rot\, rot\,\mathfrak{A} = grad\, div\,\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\iota')$$

Eine große Rolle spielen ferner die Integralsätze von Gauß und Stokes. Bei dem ersteren handelt es sich um die Umformung des Integrals $\int div\,\mathfrak{A}\, dS$ über einen geschlossenen Raum in ein Integral über dessen Oberfläche. Bedeutet n die in das Innere gerichtete Normale des Oberflächenelementes $d\sigma$, so lautet er:

$$\int div\,\mathfrak{A}\, dS = -\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varkappa)$$

Haben wir andererseits eine begrenzte Fläche, so setzt der Stokessche Satz das Flächenintegral:

$$\int rot_n\,\mathfrak{A}\, d\sigma = \int_{\bigcirc} \mathfrak{A}_s\, ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda)$$

wobei die rechts stehende Linienintegration in dem Sinne über die ganze Berandung auszuführen ist, daß der Umlauf eine Rechtsdrehung um die Normale n darstellt.

Ist an einer Fläche die Normalkomponente eines Vektors $\mathfrak{A}$ unstetig, so mißt die Größe ihres Sprunges die Flächendivergenz von $\mathfrak{A}$. Ist die Tangentialkomponente unstetig, so mißt ihr Sprung (als Vektor betrachtet) den Flächenrotor zu $\mathfrak{A}$. Wie die Flächendivergenz sich als Grenzfall einer unendlich großen räumlichen Divergenz auffassen läßt, so auch den Flächenrotor als

Grenzfall eines räumlichen Rotors. Den Grenzübergang führt man mit Hilfe des Gaußschen und des Stokesschen Satzes aus (vgl. § 21 c).

Neben den Vektoren spielt der Tensorbegriff eine große Rolle. Wir verstehen unter dem symmetrischen Tensor p den Inbegriff von neun Größen:

$$\begin{matrix} p_{xx}, & p_{xy}, & p_{xz}, \\ p_{yx}, & p_{yy}, & p_{yz}, \\ p_{zx}, & p_{zy}, & p_{zz}, \end{matrix}$$

mit den drei Beziehungen:

$$p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx},$$

welche mit den Komponenten eines beliebigen Vektors $\mathfrak{q}$ zu den Ausdrücken

$$\mathfrak{q}_x p_{xx} + \mathfrak{q}_y p_{xy} + \mathfrak{q}_z p_{xz} = [\mathfrak{q}p]_x = \mathfrak{A}_x^{\blacksquare} \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda')$$

usw. vereinigt, wieder die Komponenten eines Vektors ergeben; den letzteren nennt man das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}p]$. Aus dieser Definition folgt für eine Drehung des Koordinatensystems, daß

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{q}_x p_{xx} + \mathfrak{q}_y p_{xy} + \mathfrak{q}_z p_{xz} = a_1^{(1)} \mathfrak{A}_{x'} + a_2^{(1)} \mathfrak{A}_{y'} + a_3^{(1)} \mathfrak{A}_{z'}$$

sein muß. Setzt man hier

$$\mathfrak{A}_{x'} = \mathfrak{q}_{x'} p_{x'x'} + \mathfrak{q}_{y'} p_{x'y'} + \mathfrak{q}_{z'} p_{x'z'}$$

usw. und ferner

$$\mathfrak{q}_{x'} = a_1^{(1)} \mathfrak{q}_x + a_1^{(2)} \mathfrak{q}_y + a_1^{(3)} \mathfrak{q}_z$$

usw., so findet man eine Gleichung zwischen zwei linearen Funktionen der drei unabhängigen Variablen $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$, so daß deren Koeffizienten einzeln übereinstimmen müssen. Die Durchführung der einfachen Rechnung ergibt die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= a_1^{(1)2} p_{x'x'} + a_2^{(1)2} p_{y'y'} + a_3^{(1)2} p_{z'z'} \\ &+ 2\left(a_2^{(1)} a_3^{(1)} p_{y'z'} + a_3^{(1)} a_1^{(1)} p_{z'x'} + a_1^{(1)} a_2^{(1)} p_{x'y'}\right) \\ p_{xy} &= a_1^{(1)} a_1^{(2)} p_{x'x'} + a_2^{(1)} a_2^{(2)} p_{y'y'} + a_3^{(1)} a_3^{(2)} p_{z'z'} \\ &+ (a_2^{(1)} a_3^{(2)} + a_3^{(1)} a_2^{(2)}) p_{y'z'} + (a_3^{(1)} a_1^{(2)} + a_1^{(1)} a_3^{(2)}) p_{z'x'} \\ &+ (a_1^{(1)} a_2^{(2)} + a_2^{(1)} a_1^{(2)}) p_{x'y'} \end{aligned}$$

usw., d. h. die Tensorkomponenten transformieren sich wie die aus den Koordinaten gebildeten Quadrate x^2 usw. und Produkte xy usw. Das System der Maxwellschen oder der elastischen

Spannungen (in ruhenden Körpern) wird durch einen Tensor $\boldsymbol{p}$ dargestellt.

Neben dem symmetrischen Tensor $\boldsymbol{p}$ werden wir noch den „unsymmetrischen“ Tensor t brauchen, welcher sich aus $\boldsymbol{p}$ und den beliebigen Vektoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ durch die Definition

$$t_{jk} = p_{jk} - \mathfrak{g}_j \mathfrak{q}_k, \quad j, k = x, y, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

ableitet. Bei ihm kann man die beiden Indizes nicht miteinander vertauschen. Für die Transformation seiner Komponenten gelten die Regeln:

$$\begin{aligned} t_{xx} = {} & a_1^{(1)2} t_{x'x'} + a_2^{(1)2} t_{y'y'} + a_3^{(1)2} t_{z'z'} \\ & + a_2^{(1)} a_3^{(1)} t_{y'z'} + a_3^{(1)} a_2^{(1)} t_{z'y'} + a_3^{(1)} a_1^{(1)} t_{z'x'} \\ & + a_1^{(1)} a_3^{(1)} t_{x'z'} + a_1^{(1)} a_2^{(1)} t_{x'y'} + a_2^{(1)} a_1^{(1)} t_{y'x'}, \\ t_{xy} = {} & a_1^{(1)} a_1^{(2)} t_{x'x'} + a_2^{(1)} a_2^{(2)} t_{y'y'} + a_3^{(1)} a_3^{(2)} t_{z'z'} \\ & + a_2^{(1)} a_3^{(2)} t_{y'z'} + a_3^{(1)} a_2^{(2)} t_{z'y'} + a_3^{(1)} a_2^{(2)} t_{z'x'} \\ & + a_1^{(1)} a_3^{(2)} t_{x'z'} + a_1^{(1)} a_2^{(2)} t_{x'y'} + a_2^{(1)} a_1^{(2)} t_{y'x'} \end{aligned}$$

usw., wie man aus den Transformationen für $\boldsymbol{p}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ ohne weiteres ableitet. Das Produkt $[\mathfrak{A}\, t]$ aus dem Vektor $\mathfrak{A}$ und dem Tensor t, definiert durch die Gleichungen

$$[\mathfrak{A}\, t]_x = \mathfrak{A}_x t_{xx} + \mathfrak{A}_y t_{xy} + \mathfrak{A}_z t_{xz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu')$$

usw., stellt auch hier einen Vektor dar; denn es ist laut Definition (μ) von t:

$$[\mathfrak{A}\, t] = [\mathfrak{A}\, \boldsymbol{p}] - \mathfrak{g}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{q}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\nu)$$

Ist n eine beliebige Richtung, so lassen sich die drei Kosinus $\cos(n\,x)$, $\cos(n\,y)$, $\cos(n\,z)$ als die Komponenten eines Vektors vom absoluten Betrage 1 auffassen. Die Vektorprodukte aus diesem und den Tensoren $\boldsymbol{p}$ bzw. t nennen wir $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{t}_n$, es ist also

$$\mathfrak{t}_{nx} = t_{xx} \cos(n\,x) + t_{xy} \cos(n\,y) + t_{xz} \cos(n\,z) \quad . \quad . \quad (\nu')$$

usw.; für $\mathfrak{p}_n$ gelten analoge Gleichungen. Ist ferner φ ein Skalar, so ist bei der Drehung des Achsenkreuzes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + a_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + a_3^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial z'}$$

usw. Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

transformieren sich also wie die Komponenten eines Vektors; sie bilden, wie man sagt, einen symbolischen Vektor. Die Vektorprodukte aus dem letzteren und p bzw. t bezeichnen wir mit $\mathfrak{div}\, p$ und $\mathfrak{div}\, t$. Es ist also

$$\mathfrak{div}_x t = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \quad \ldots\ldots (\nu'')$$

usw. Auch hier gilt für $\mathfrak{div}\, p$ das Analoge. Durch partielle Integration bestätigt man nach (ν') und (ν'') leicht die Gleichung:

$$\int \mathfrak{div}_x t \, dS = -\int t_{nx} \, d\sigma,$$

wobei die Integration links über einen geschlossenen Raum, rechts über dessen gesamte Oberfläche auszudehnen und unter n die nach innen gerichtete Normale des Flächenelementes $d\sigma$ zu verstehen ist. Man kann die letzte Gleichung mit ihren Analogen für die y- und z-Richtung zusammenfassen in die vektorielle Beziehung:

$$\int \mathfrak{div}\, t \, dS = -\int t_n \, d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots (\xi)$$

Diese bleibt richtig, wenn man den unsymmetrischen Tensor t mit dem symmetrischen p und zugleich t_n mit p_n vertauscht.

Bezeichnet r den Radiusvektor, der von einem beliebigen festen Punkte nach dem Volumelement dS hinweist, so kann man jenen festen Punkt als Anfangspunkt der Koordinaten wählen und dann $r_x = x$ usw. setzen. Dieselbe partielle Integration, welche zu (ξ) führt, dient auch zum Beweise der Gleichungen:

$$\int [r, \mathfrak{div}\, t]_x \, dS = -\int [r\, t_n]_x \, d\sigma - \int (t_{zy} - t_{yz}) \, dS.$$

usw. Für den symmetrischen Tensor p vereinfachen sie sich zu

$$\int [r, \mathfrak{div}\, p] \, dS = -\int [r\, p_n] \, d\sigma \quad \ldots\ldots (\xi')$$

Nach den oben angegebenen Regeln ist der Ausdruck

$$[q\, t] - [q\, [q\, g]]$$

als Differenz zweier Vektoren selbst ein solcher. g und q sollen dieselben Vektoren wie in (μ) sein. Integrieren wir seine Divergenz über einen geschlossenen Raum, so ist nach dem Gaußschen Satz $(\varkappa)$:

$$\int div\left\{[q\,t]-\left[q\,[q\,g]\right]\right\}dS=-\int d\sigma\left\{[q\,t]_n-\left[q\,[q\,g]\right]_n\right\}$$
$$=-\int d\sigma\left\{cos\,(n\,x)\left([q\,t]_x-\left[q\,[q\,g]\right]_x\right)\right.$$
$$\left.+\,cos\,(n\,y)\left([q\,t]_y-\left[[q\,g]\right]_y\right)+cos\,(n\,z)\left([q\,t]_z-\left[[q\,g]\right]_z\right)\right\}.$$

Rechnen wir hier die Komponenten

$$[q\,t]_x \quad \text{und} \quad [q\,[q\,g]]_x$$

aus, so finden wir als Faktor von $cos\,(n\,x)$:

$$\left(q_x\,t_{xx}+q_y\,t_{xy}+q_z\,t_{xz}-\left(q_y\,(q_x\,g_y-q_y\,g_x)-q_z\,(q_z\,g_x-q_x\,g_z)\right)\right)$$
$$=\left(q_x\,t_{xx}+q_y\,t_{xy}+q_z\,t_{xz}-\left(q_y\,(t_{xy}-t_{yx})-q_z\,(t_{zx}-t_{xz})\right)\right)$$
$$=(q_x\,t_{xx}+q_y\,t_{yx}+q_z\,t_{zx}).$$

Entsprechend lauten die Faktoren von $cos\,(n\,y)$ und $cos\,(n\,z)$. Ordnet man in dem Flächenintegral nach den Komponenten von q, so findet man schließlich nach (ν') für das Flächenintegral den Wert:

$$-\int d\sigma\left\{q_x\,t_{nx}+q_y\,t_{ny}+q_z\,t_{nz}\right\}=-\int(q\,t_n)\,d\sigma.$$

Also ist

$$\int div\left\{[q\,t]-\left[q\,[q\,g]\right]\right\}=-\int(q\,t_n)\,d\sigma. \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

c) Die verschiedenen Arten der Zeitdifferentiation.

Ist A eine beliebige Funktion der Koordinaten x, y, z und der Zeit t, so bezeichnen wir den Differentialquotienten von A nach t bei festgehaltenen x, y, z mit $\frac{\partial A}{\partial t}$ oder auch $\dot{A}$. Oft aber haben wir unter A eine Zustandsgröße eines mit der (räumlich und zeitlich stetig veränderlichen) Geschwindigkeit q bewegten Körpers zu verstehen und uns zu fragen, wie sie sich in einem materiellen, d. h. mitbewegten Punkte ändert. Den so definierten Differentialquotienten schreiben wir $\frac{\delta A}{\delta t}$. In der Zeit δt wachsen aber die Koordinaten des mitbewegten Punktes um $\delta x = q_x\,\delta t$ usw., also ist

$$\delta A=\frac{\partial A}{\partial t}\delta t+\frac{\partial A}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A}{\partial z}\delta z$$
$$=\left(\dot{A}+q_x\frac{\partial A}{\partial x}+q_y\frac{\partial A}{\partial y}+q_z\frac{\partial A}{\partial z}\right)\delta t,$$

mithin

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \dot{A} + (\mathfrak{q}\, grad\, A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\pi)$$

Ferner wird manchmal nach der Veränderung des Produktes $A\,dV$ gefragt, wobei dV ein materielles Volumenelement im bewegten Körper ist. Bekanntlich ändert sich dV in der Zeit δt um

$$\delta\, dV = dV . div\, \mathfrak{q}\, \delta t,$$

also ist [vgl. Rechnungsregel (ξ) und (π)]

$$\frac{\delta(A\,dV)}{\delta t} = dV\left(\frac{\delta A}{\delta t} + A\, div\, \mathfrak{q}\right) = dV\big(\dot{A} + div\,(A\mathfrak{q})\big).$$

Wir definieren nun den Differentialquotienten $\underline{\dot{A}}$ so, daß

$$\underline{\dot{A}}\, dV = \frac{\delta(A\,dV)}{\delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varrho)$$

wird, und finden dementsprechend:

$$\underline{\dot{A}} = \dot{A} + div\,(A\mathfrak{q}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varrho')$$

In der klassischen Mechanik gilt z. B. für den Zusammenhang zwischen Kraftdichte $\mathfrak{F}$ und Impulsdichte $\mathfrak{g}$ die Gleichung

$$\underline{\dot{\mathfrak{g}}} = \mathfrak{F} \quad \text{oder} \quad \frac{\delta \mathfrak{g}\, dV}{\delta t} = \mathfrak{F} dV,$$

welche man aber auch aus dieser (Lagrangeschen) in die Eulersche Form

$$\dot{\mathfrak{g}}_x + div\,(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}) = \mathfrak{F}_x \text{ usw.}$$

umschreiben kann. (Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik, 15. Vorlesung, Leipzig 1897.)

Schließlich betrachten wir noch eine Fläche $d\sigma$, deren Punkte die (stetig variierende) Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ haben; ihre Normale n wählen wir zunächst so, daß sie mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ einen spitzen Winkel bildet. Wir untersuchen die Veränderung

$$\frac{\delta(\mathfrak{A}_n\, d\sigma)}{\delta t}\, \delta t,$$

welche der Ausdruck $\mathfrak{A}_n\, d\sigma$ in der Zeit δt erleidet, wenn $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist. Wir denken uns zu diesem Zwecke $\mathfrak{A}$ für jeden festen Raumpunkt fürs erste unveränderlich, d. h. $\dot{\mathfrak{A}} = 0$, und berechnen unter dieser Annahme das Produkt $div\, \mathfrak{A}\, dS$,

wobei $dS = \mathfrak{q}_n\, d\sigma\, \delta t$ der Inhalt des Zylinders ist, welchen die Fläche $d\sigma$ bei ihrer Bewegung in der Zeit δt beschreibt. Nach dem Gaußschen Satze ist

$$div\, \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{q}_n\, d\sigma\, \delta t = div\, \mathfrak{A}\, dS = -\int \mathfrak{A}_n \,.\, d\sigma',$$

wobei die Integration nach $d\sigma'$ sowohl über die Grundflächen als den Mantel des Zylinders zu erstrecken ist. Der Anteil der Grundflächen daran ist, da die Normale n' bei beiden in das Innere weist, also einmal dieselbe, das andere Mal die entgegengesetzte Richtung hat wie n, gleich $\frac{\delta(\mathfrak{A}_n\, d\sigma)}{\delta t}\, \delta t$. Den Mantel aber können wir in parallelepipedische Elemente $d\sigma'$ zerlegen, welche aus den Strecken $\mathfrak{q}\, \delta t$ und den Linienelementen ds der Randkurve von $d\sigma$ gebildet sind. ds werde dabei in dem der Normalen n wie beim Stokesschen Satz entsprechenden Sinne positiv gerechnet. Der Inhalt eines solchen Elementes ist $d\sigma' = q\, ds\, sin(\mathfrak{q}, ds)\, \delta t$, also gleich dem absoluten Wert des Vektorproduktes $[ds, \mathfrak{q}]\, \delta t$. Letzteres hat aber die Richtung der Normalen von $d\sigma'$, also ist [vgl. (β)]

$$\mathfrak{A}'_n\, d\sigma' = (\mathfrak{A}\, [ds, \mathfrak{q}])\, \delta t = (ds\, [\mathfrak{q}\, \mathfrak{A}])\, \delta t = [\mathfrak{q}\, \mathfrak{A}]_s\, ds\, \delta t,$$

mithin der Anteil des Mantels an dem Flächenintegral nach (λ) gleich:

$$\delta t \int_{\bigcirc} [\mathfrak{q}\, \mathfrak{A}]_s\, ds = rot_n\, [\mathfrak{q}\, \mathfrak{A}]\, d\sigma\, \delta t$$

und wir finden unter der Annahme $\dot{\mathfrak{A}} = 0$:

$$\frac{\delta(\mathfrak{A}_n\, d\sigma)}{\delta t} + rot_n\, [\mathfrak{q}\, \mathfrak{A}]\, d\sigma = \mathfrak{q}_n\, div\, \mathfrak{A}\, d\sigma\,.$$

Fügen wir endlich noch die von der Bewegung unabhängige Veränderung $\dot{\mathfrak{A}}_n\, d\sigma$ additiv hinzu, so folgt:

$$\frac{\delta(\mathfrak{A}_n\, d\sigma)}{\delta t} = d\sigma\, (\dot{\mathfrak{A}}_n + \mathfrak{q}_n\, div\, \mathfrak{A} + rot_n\, [\mathfrak{A}\, \mathfrak{q}])\,.$$

Wir können mithin einen Vektor $\underline{\dot{\mathfrak{A}}}$ so definieren, daß für jede Orientierung der Fläche $d\sigma$

$$\underline{\dot{\mathfrak{A}}}_n\, d\sigma = \frac{\delta(\mathfrak{A}_n\, d\sigma)}{\delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\sigma)$$

ist; dann ist nämlich

$$\underline{\dot{\mathfrak{A}}} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{q}\, div\, \mathfrak{A} + rot\,[\mathfrak{A}\mathfrak{q}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\sigma')$$

Die beschränkende Annahme eines spitzen Winkels zwischen n und $\mathfrak{q}$ spielt offenbar in Formel (σ) keine Rolle mehr; beide Seiten wechseln ihr Vorzeichen, wenn n die Richtung umkehrt.

d) Bezeichnung und Maßsystem der physikalischen Größen.

Wir beziehen alle Größen auf das absolute Maßsystem, indem wir als Einheiten Gramm (g), Zentimeter (cm), Sekunde (sec) und Celsiusgrad (grad) zugrunde legen. Wir messen also die Kraft in Dyn, die Energie einschließlich der Wärme in Erg. Die Masse („Ruhmasse") bezeichnen wir mit m, die longitudinale und transversale Masse mit m_l und m_t, die Dichte (spezifisches Gewicht) mit δ, die Energie mit E, ihre Dichte mit W, das Wärmequantum, wenn es einem Körper bei einem bestimmten physikalischen Vorgange zugeführt wird, mit Q, mit R dagegen, wenn es auf die Zeiteinheit, und mit Q, wenn es auf Zeit und Volumeneinheit bezogen wird. T ist die absolute Temperatur, S die Entropie, F die freie Energie, p der (relative) Druck; $\mathfrak{R}$ soll die Kraft, $\mathfrak{F}$ die Kraft pro Volumeneinheit (Kraftdichte), $\mathfrak{N}$ das Drehmoment, $\mathfrak{G}$ den Impuls, $\mathfrak{g}$ dessen Dichte, $\mathfrak{L}$ den Drehimpuls bedeuten; mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Dichte des Energiestromes, mit $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit, mit $\dot{\mathfrak{q}}$ die Beschleunigung eines Körpers. $\mathfrak{v}$ hingegen ist stets die Geschwindigkeit des „gestrichenen" Systems K' gegen das „ungestrichene" K und $c = 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}$ der Absolutwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum. Zur Abkürzung setzen wir häufig: $v : c = \beta$.

Die elektromagnetischen Größen lassen sich bekanntlich auf verschiedene Arten mit dem absoluten Maßsystem in Verbindung setzen. Wir verfahren im folgenden wie H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der mathem. Wissensch. V, 1, Art. 13 und 14. Dies an Heaviside anknüpfende Lorentzsche Maßsystem stimmt mit dem gewöhnlich als elektrostatisch bezeichneten in den Dimensionen völlig überein, unterscheidet sich aber von ihm in den Einheiten und erreicht so den Vorteil, daß der Faktor 4π aus den Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie verschwindet [vgl. (I) bis (X)]. Freilich tritt er dafür in allen Potentialformeln auf,

weil das elektrostatische Potential einer Punktladung e jetzt $\frac{e}{4\pi r}$ ist. Da aber eine solche Ladung Kugelsymmetrie aufweist, hat er hier eine gewisse sachliche Berechtigung; zugleich spielen diese Formeln eine geringere Rolle in der Theorie als die Grundgleichungen, so daß man ihm weniger häufig begegnet.

Im Lorentzschen Maßsystem sind die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ reine Zahlen und für den leeren Raum beide gleich 1. Die elektrische Feldstärke und Verschiebung, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, haben ebenso wie die entsprechenden magnetischen Vektoren, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, die Dimension $[g^{1/2}\,cm^{1/2}\,sec^{-1}]$, desgleichen die den elektrischen Strom hervorrufende „elektromotorische Kraft“ $\mathfrak{E}^*$, welche in der Relativitätstheorie von $\mathfrak{E}$ zu unterscheiden ist; die Elektrizitätsmenge e ist von der Dimension $[g^{1/2}\,cm^{3/2}\,sec^{-1}]$. Über die Einheiten verfügen wir so, daß die Abstoßungskraft zweier ruhenden Elektrizitätsmengen e und e' im Abstand r voneinander im leeren Raum $\frac{ee'}{4\pi r^2}$ ist, daß ferner die Kraft, welche e im Felde von der Stärke $|\mathfrak{E}|$ erfährt, $e|\mathfrak{E}|$ wird. Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist durch das $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$-fache der elektrostatischen Einheit, der Wert einer bestimmten Elektrizitätsmenge somit $\sqrt{4\pi}$ mal so groß wie der elektrostatische. Um den Vergleich mit experimentellen Daten zu erleichtern, empfiehlt es sich, die Multiplikation mit $\sqrt{4\pi}$ nicht auszuführen, sondern z. B. für das elektrische Elementarquantum den Wert

$$4{,}65\,.\,10^{-10}\,.\,\sqrt{4\pi}\;[g^{1/2}\,cm^{3/2}\,sec^{-1}]$$

anzugeben. Wie e verhält sich auch die wahre elektrische Dichte ϱ und die elektrische Stromdichte $\mathfrak{J}$. Die Leitfähigkeit σ wird 4π mal so groß wie im elektrostatischen System. Ist die Ladung e über die Fläche einer Kugel vom Radius a gleichmäßig verteilt, so ist die elektrostatische Energie im elektrostatischen Maßsystem $\frac{e^2}{2a}$, bei gleichmäßiger Verteilung über das Volumen aber $\frac{3}{5}\frac{e^2}{a}$ im Lorentzschen Maßsystem daher $\frac{e^2}{8\pi a}$ bzw. $\frac{3e^2}{20\pi a}$. Wo wir die elektromagnetische Energie, Impuls usw. von mechanischer

Energie und Impuls zu unterscheiden haben, geschieht dies durch den Index e, also z. B. E_e und $\mathfrak{G}_e$. φ ist das skalare, $\mathfrak{A}$ das vektorielle retardierte Potential.

Von den Vierervektoren ist Y die Vierergeschwindigkeit, F (Digamma) die Viererkraft, P der Viererstrom, K die Viererkonvektion, Λ die Viererleitung, Φ das Viererpotential. Zu den Sechservektoren gehört der Feldvektor $\mathfrak{M}$, welcher die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die Verschiebung $\mathfrak{B}$ umfaßt, und der Verschiebungsvektor $\mathfrak{B}$, dessen Komponent an die Raumvektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ angibt; im leeren Raum sind beide miteinander identisch.

Literatur.

§ 1.

Philipp Frank, Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und Elektrodynamik. Wiener Sitzungsber. **118**, 337, 1909.

1. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Göttinger Nachr. 1897, S. 110.

2. W. Wien, Über die Wandlung des Raum- und Zeitbegriffes in der Physik. Sitzungsber. d. phys.-med. Ges. Würzburg 1909; ferner Phys. Zeitschr. **5**, 585 u. 604, 1904.

§ 2.

J. Laub, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **7**, 405, 1910.

1. H. A. Wilson, Phil. Trans. (A) **204**, 121, 1904.

2. R. Blondlot, C. R. **133**, 778, 1901.

3. H. v. Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akad., März 1876; Ges. Abh. I, 791, 1882.

4. A. Eichenwald, Ann. d. Phys. **11**, 1, 1903.

5. W. C. Röntgen, Wied. Ann. **35**, 264, 1888; **40**, 93, 1890.

6. A. Eichenwald, Ann. d. Phys. **11**, 421, 1903.

7. H. Fizeau, C. R. **33**, 349, 1851.

8. Michelson u. Morley. Amer. Journ. of Science **31**, 377, 1886.

9. Airy, Proc. Roy. Soc. London **20**, 35, 1871; **21**, 121, 1873; Phil. Mag. **43**, 310, 1872.

10. J. Stark, Ann. d. Phys. **21**, 401, 1906. J. Stark u. K. Siegel, Ebend. **21**, 457, 1906. J. Stark, W. Hermann, S. Kinoshita, Ebend. **21**, 462, 1906.

11. Fürst B. Galitzin u. Wilip, Astrophys. Journ. **26**, 45, 1907.

12. A. A. Michelson, Sill. Journ. **21**, 120, 1881; Phil. Mag. **8**, 716, 1904. A. A. Michelson u. E. W. Morley, Sill. Journ. **34**, 333, 1887. E. W. Morley u. D. C. Miller, Phil. Mag. **8**, 753, 1904; **9**, 680, 1905. J. Lüroth, Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. **7**, 1909; vgl. Ref. von P. Debye, Beibl. d. Ann. d. Phys. **33**, 1909. E. Kohl, Ann. d. Phys. **28**, 259 u. 662, 1909. M. Laue, Ebend. **33**, 156, 1910.

13. Fr. T. Trouton u. H. R. Noble, Proc. Roy. Soc. **72**, 132, 1903.

14. E. Mascart, Ann. école norm. **3**, 1874. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **4**, 678, 1902. D. B. Brace, Ebend. **7**, 317, 1904; **10**, 71 u. 591, 1905. B. Strasser, Ann. d. Phys. **24**, 137, 1907.

15. Des Coudres, Wied. Ann. **38**, 71, 1889.

16. Fr. T. Trouton u. A. O. Rankine, Proc. Roy. Soc. **8**, 420, 1908.

17. M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons; ferner Theorie der Elektrizität, Bd. II. Leipzig u. Berlin 1908.

18. K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, S. 245.

19. A. Sommerfeld, Ebend. 1904, S. 363, 999; 1905, S. 201.

20. W. Kaufmann, Ebend. 1902, S. 291; Ann. d. Phys. **19**, 487, 1906; **20**, 639, 1906.

21. A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. **28**, 513; **29**, 1063, 1909.

22. E. Hupka, Ebend. **31**, 169, 1910.

23. M. Planck, Phys. Zeitschr. **7**, 753, 1906; Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 418, 1906; **9**, 301, 1907. J. Stark, Ebend. **10**, 14, 1908. W. Kaufmann, Ebend. **9**, 667, 1907; **10**, 91, 1908. W. Heil, Zur Theorie der Kaufmannschen Versuche über die elektromagnetische Ablenkung der β-Strahlen. Berl. Diss. 1909; Ann. d. Phys. **31**, 519, 1910. A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. **22**, 429, 1907; **30**, 166, 1909; **32**, 131, 1910. E. Hupka, Ebend. **33**, 400, 1910. A. H. Bucherer, Ebend. **30**, 974, 1909.

§ 3.

1. H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Proc. Amsterdam 1904, p. 809.

2. E. Cohn, Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper, Ann. d. Phys. **7**, 29, 1902. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Berliner Ber. 1904, S. 1294 u. 1404.

§ 4.

H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wied. Ann. **41**, 369, 1890. Ges. Werke **2**, 256, 1894.

1. Ph. Frank, Ann. d. Phys. **27**, 897, 1908.

2. H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **53**, 135, 1893. Ges. Abh. III, S. 526, 1895.

§ 5.

H. A. Lorentz, La théorie électromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants. Arch néerl. **25**, 363, 1892. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895. Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, Art. 14, 1903.

1. M. Planck, Ann. d. Phys. **31**, 758, 1910. H. A. Lorentz, Phys. Zeitschr. **11**, 349, 1910.

§ 6.

A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. **17**, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4**, 411, 1907.

§ 7.

A. Einstein, vgl. § 6.

1. O. Lodge, London Transact. (A) **184**, 727, 1893.

2. H. A. Lorentz, v. Amsterdam, Zittingsverlag, Acad. v. Wet. **1**, 74, 1892.

3. A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. **10**, 826, 1909.

4. Derselbe, Ebend. **8**, 841, 1907.

§ 8.

H. Minkowski, Raum und Zeit. Phys. Zeitschr. **10**, 104, 1909. Auch als Broschüre erschienen. Leipzig, B. G. Teubner, 1909.

§ 9.

H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Göttinger Nachr. 1907, S. 1. und Mathematische Ann. **68**, 472, 1910, auch separat erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig 1911.

1. F. Klein, Phys. Zeitschr. **12**, 17, 1911. V. Variczak, Phys. Zeitschr. **11**, 93, 287, 586, 1910.

2. A. Sommerfeld, vgl. § 7, Anm. 3.

§ 10 bis 13.

H. Minkowski, vgl. § 8 und 9.

A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I. u. II. Ann. d. Phys. **32**, 749, 1910; **33**, 649, 1910.

§ 14 und 15.

A. Einstein, vgl. § 6. H. Minkowski, vgl. § 9. A. Sommerfeld, Vgl. § 10 bis 13.

1. H. Poincaré, Arch. néerl. (2) **5**, 252, 1900.

2. M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 17.

3. M. Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik. Phys. Zeitschr. **9**, 828, 1908; Verh. D. Phys. Ges. **6**, 728, 1908.

§ 16.

A. Einstein, vgl. § 6.

1. M. Abraham, Ann. d. Phys. **14**, 236, 1904. W. Meißner, Zur Theorie des Strahlungsdruckes. Diss. Berlin 1907, Abschnitt 4.

§ 17.

1. M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 17.

§ 18.

H. Minkowski, Vgl. § 8. M. Born, Ann. d. Phys. **28**, 571, 1909; **30**, 1, 1909. A. Sommerfeld, vgl. § 10 bis 13.

1. A. Liénard, L'éclairage électrique **16**, 5, 53, 106, 1898.

2. E. Wiechert, Arch. néerl. (2) 5, 549, 1900.

3. H. A. Lorentz, vgl. § 5.

4. M. Born, vgl. oben und Göttinger Nachr. 1910, S. 161. Paul Ehrenfest, Phys. Zeitschr. 10, 918, 1909; 11, 1127, 1910. G. Herglotz, Ann. d. Phys. 31, 393, 1910. W. v. Ignatowsky, Ebend. 33, 607, 1910. F. Noether, Ebend. 31, 919, 1910. M. Planck, Phys. Zeitschr. 11, 294, 1910. M. Planck, Arch. néerl. (21) 5, 164, 1900. M. Laue, Phys. Zeitschr. 12, 48, 1911.

5. H. A. Lorentz, vgl. § 3, Anm. 1.

6. M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 17.

7. H. A. Lorentz, Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, Art. 14, Nr. 17. M. Abraham, vgl. § 16, Anm. 1. M. Laue, Ann. d. Phys. 28, 436, 1909.

§ 19 und 20.

H. Minkowski, vgl. § 9. A. Einstein u. J. Laub, Ann. d. Phys. 26, 532, 1908. Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkt der Elektronentheorie; aus dem Nachlaß von H. Minkowski bearbeitet von M. Born, veröffentlicht in den Fortschritten der Mathem. Wiss. in Monographien, Heft 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

§. 21.

1. A. Einstein u. J. Laub, Ann. d. Phys. 28, 445, 1909.

2. Vgl.: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen, bearbeitet von H. Weber. I. Braunschweig 1900. § 156.

3. A. Einstein und J. Laub, vgl. § 19 u. 20.

4. H. Minkowski, Abschnitt 9 der unter § 9 zitierten Arbeit. Anton Wèber, Phys. Zeitschr. 11, 134, 1910.

5. M. Laue, Ann. d. Phys. 23, 989, 1907. A. Einstein, vgl. das zweite Zitat unter § 6.

§ 22.

1. M. Planck, vgl. § 14 u. 15, Anm. 3.

2. M. Abraham, Rendiconti del circoli matematico di Palermo 30, 1910.

3. M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Ann. d. Phys. 26, 1, 1908.

§ 23.

Vgl. das umfassende Referat von F. Hasenöhrl, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 2, 267, 1905. Vgl. auch § 16, Anm. 1.

§ 24 bis 27.

M. Planck, vgl. § 22, Anm. 1 u. 3. A. Einstein, vgl. § 6, zweites Zitat. Gilbert N. Lewis, Phil. Mag. 16, 705, 1908.

1. F. Hasenöhrl, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **6**, 485, 1909; vgl. auch M. Planck, Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 136, 1906.

2. A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639, 1905; **20**, 627, 1906; **23**, 371, 1907. G. Nordström, Phys. Zeitschr. **10**, 681, 1909; **11**, 440, 1910. M. Abraham, Ebend. **10**, 737, 1909; **11**, 527, 1910. M. Laue, vgl. § 18, Anm. 7.

3. H. Poincaré, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **21**, 129, 1906. H. A. Lorentz, The theory of electrons. Leipzig 1909. § 178 u. folgende. Vgl. auch § 3, Anm. 1. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 22.

4. Paul Ehrenfest, Ann. d. Phys. **23**, 204, 1907.

§ 28 und 29.

M. Planck, Vgl. § 22, Anm. 3. A. Einstein, Vgl. § 6, zweites Zitat. K. v. Mosengeil, Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. Diss. Berlin 1906 und Ann. d. Phys. **22**, 867, 1907.

§ 30.

1. Poincaré, vgl. § 24 bis 27, Anm. 3.
2. H. Minkowski, vgl. § 8 u. 9.
3. A. Sommerfeld, vgl. § 10 bis 13.

NAMENREGISTER.

Abraham 17, 84, 97, 116, 139, 167.
Airy 12.
Arrhenius 145.

Blondlot 9.
Boltzmann 142, 172.
Born 106, 112.
Bucherer 18, 166.

Cohn 19, 139.

Debye 144.
Des Coudres 16.

Eichenwald 10, 24, 132.
Einstein 33, 43, 148.

Faraday 8.
Fitzgerald 41.
Fizeau 11, 25, 133.

Galitzin 13, 93.

Helmholtz, v. 178.
Hertz 19, 20.
Hupka 17, 18, 166.

Kaufmann 17.
Klein 54.

Lebedew 144, 145.
Liénard 105.
Lorentz 19, 32, 33 ff., 41, 105, 116, 122.

Maxwell 142.
Michelson 13, 25, 44, 88.
Michelson u. Morley 11.
Minkowski 43, 107, 116, 187.
Mosengeil, v. 175, 184.

Nichols u. Hull 144.

Planck 88, 116, 138, 141, 172, 179, 184.
Poincaré 187.
Precht 153.

Röntgen 10, 25, 132.
Rowland 9, 123.

Schwarzschild 17.
Sommerfeld 17, 46, 105, 112, 187.
Stark 13.

Trouton u. Noble 15, 88, 99, 148, 170.
Trouton u. Rankine 16.

Valentiner 182.

Wiechert 105.
Wien 7.
Wilson 9, 23, 129.

SACHREGISTER.

Aberration 12, 89.
Additionstheorem der Geschwindigkeit 3, 43, 55.

Beschleunigung, Transformation der 106.
Bewegungsgröße, s. Impuls.

Dopplereffekt 12, 89, 93.
Drehimpuls 85, 97, 138, 168.
Drehmoment 97, 146, 168.
Druck, Transformation des 154.
— im Elektron 164.
— der Hohlraumstrahlung 180, 182.

Elektrizitätsmenge, Transformation der 77, 120.
Elektromotorische Kraft 8, 124, 127, 129.
Elektron 27, 98.
—, Dynamik des 16, 166, 170.
Energie, elektromagnetische 87, 91, 97, 139.
—, mechanische 149, 150, 153, 160, 167.
—, kinetische 4, 158.
Entropie 172.
— der Hohlraumstrahlung 181, 182.
Erdbewegung 12 bis 16.

Feldstärke, Transformation der 97, 119.
Feldvektor 78, 118.
Flächensatz 86, 146.
Fresnelscher Mitführungskoeffizient 11, 132.

Galilei-Transformation 3.

Hyperbelbewegung 105.

Impuls, Gleichbewegungsgröße 4, 26, 83, 97, 137, 149, 159, 168.
Induktion 8, 26, 127.

Joulesche Wärme 22, 139.

Kontinuitätsgleichung 21, 77, 121.
Konvektionsstrom der Elektrizität 10, 24, 119, 132.
— der Energie 150.
Körper, starrer 107.
Kraft, Transformation der 80, 135.
Krümmungshyperbel 107.

Leitungsdichte 120.
Leitungsstrom 119, 132.
Lorentz-Kontraktion 41.
Lorentz-Transformation 39, 48, 49, 54, 57.

Magnetomotorische Kraft 124, 127, 129.
Masse 151, 163.
— des Elektrons 166.
— der Hohlraumstrahlung 183.
—, longitudinale, transversale 17, 163, 165, 183.

Nachkegel 51, 53.

Pointingscher Vektor 22, 91, 92, 139.
—, Transformation des 86.
Prinzip der kleinsten Wirkung 178.

Produkt, skalares 61, 65, 66.
—, vektorielles 66.
—, Tensor- 75.

Quasistationäre Bewegung 98, 116, 156, 162, 183.

Sechservektor 64.
Spannungen, Maxwellsche 27, 82, 86, 88.
—, relative 151, 154, 158, 168.
Stefan-Boltzmannsches Gesetz 182.

Temperatur 173.
Trägheit 138, 152, 157.

Verschiebungsvektor 119.
Vierergeschwindigkeit 63.
Viererkonvektion 119.
Viererkraft 80, 158.
Viererleitung 119.
Viererpotential 99.
Viererstrom 77, 118.
Vierervektor 61.
Vorkegel 51, 53.

Wärme, Transformation der 140, 141, 149, 173.
Wellengleichung 21.
Welt 47.
Weltpunkt, Weltlinie 47.
Welttensor 73, 82, 136, 149, 159.
Wiensches Verschiebungsgesetz 172.

Zwischengebiet 51, 53.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft

Sammlung naturwissenschaftlicher und ⊞ mathematischer Einzeldarstellungen ⊞

Die Entwicklung der einzelnen Wissenschaften zu verfolgen wird nur dann möglich sein, wenn in nicht zu langen Zwischenräumen übersichtliche Darstellungen über begrenzte Teile derselben erscheinen. Dadurch wird auch dem Spezialforscher ein Einblick in Nebengebiete eröffnet. Diesem Zwecke dienend, also nicht populär im gewöhnlichen Sinne des Wortes, entnehmen die Einzeldarstellungen der „Wissenschaft" ihren Stoff der Mathematik, den anorganischen und den organischen Naturwissenschaften und deren Anwendungen; auch Biographien von großen Gelehrten und historische Darstellungen einzelner Zeiträume hat sich die unter besonderer Mitwirkung von Prof. Dr. Eilhard Wiedemann-Erlangen erscheinende Sammlung zum Ziel gesetzt.

∴ Durch sämtliche Buchhandlungen zu beziehen ∴

10000. 8. 10.

Verzeichnis der Mitarbeiter

Dr. **Otto Freiherr von und zu Aufsess**, München	Heft	4
Prof. Dr. **H. Baumhauer**, Freiburg i. Schweiz	„	7
Prof. **V. Bjerknes**, Christiania	„	28
Mme. **S. Curie**, Paris	„	1
Prof. Dr. **B. Dessau**, Perugia	„	33
Prof. Dr. **C. Doelter**, Graz	„	13
Prof. Dr. **B. Donath**, Charlottenburg	„	14
Dr. **Wilh. R. Eckardt**, Aachen	„	31
Privatdozent Dr. **Edwin S. Faust**, Straßburg	„	9
Prof. Dr. **Otto Fischer**, Leipzig	„	18
Dr. **Otto Frölich**, Berlin	„	5
Privatdozent Dr. **E. Gehrcke**, Berlin	„	17
Prof. Dr. **F. E. Geinitz**, Rostock	„	16
Prof. Dr. **Josef Ritter von Geitler**, Czernowitz	„	6
Prof. Dr. **Hermann Gutzmann**, Berlin	„	29
Prof. Dr. **G. Jäger**, Wien	„	12
Prof. Dr. **Albert Jesionek**, Gießen	„	32
Dr. phil. **Walter von Knebel**, Groß-Lichterfelde (†)	„	15
Prof. Dr. **Hermann Kobold**, Kiel	„	11
Prof. Dr. **Edm. König**, Sondershausen	„	22
Prof. Dr. **J. P. Kuenen**, Leiden	„	20
Privatdozent Dr. **G. F. Lipps**, Leipzig	„	10
Prof. **H. Mache**, Wien	„	30
Prof. Dr. **Joh. Bapt. Messerschmitt**, München	„	27
Dr. **Rob. Pohl**, Berlin	„	34
Prof. **E. Rutherford**, Montreal	„	21
Privatdozent Dr. **Otto Sackur**, Breslau	„	24
Prof. Dr. **G. C. Schmidt**, Königsberg	„	2
Prof. Dr. **Julius Schmidt**, Stuttgart	„	23
Prof. **E. v. Schweidler**, Wien	„	30
Prof. Dr. **J. J. Thomson**, Cambridge	„	3
	„	25
Dr. **P. Vageler**, Königsberg i. Pr.	„	26
Prof. Dr. **A. Wangerin**, Halle a. S.	„	19
Prof. Dr. **A. Werner**, Zürich	„	8

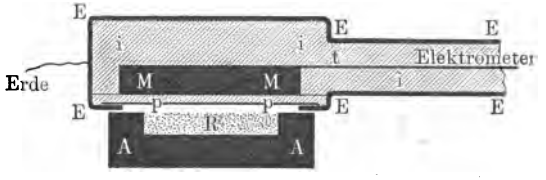
(Weitere Hefte in Vorbereitung)

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 1

Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen

Von **Mme. S. Curie.** Übersetzt und mit Literatur-Ergänzungen versehen von W. Kaufmann. Dritte Auflage. Mit 14 Abbildungen. VIII, 132 S. 1904. Geh. M 3.—, geb. M 3.80.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. — 1. Kapitel. Radioaktivität des Urans und Thors. Radioaktive Mineralien. a) Becquerelstrahlen; b) Messung der Strahlungsintensität; c) Radioaktivität der Uran- und Thorverbindungen; d) Ist die Radioaktivität der Atome ein allgemeines Phänomen? e) Radioaktive Mineralien. — 2. Kapitel. Die neuen radioaktiven Substanzen. a) Untersuchungsmethoden; b) Polonium, Radium, Aktinium; c) Spektrum des Radiums; d) Abscheidung der neuen radioaktiven Substanzen; e) Polonium; f) Herstellung des reinen Radiumchlorids; g) Bestimmung des Atomgewichtes des Radiums; h) Eigenschaften der Radiumsalze; i) Fraktionierung gewöhnlichen Baryumchlorids. — 3. Kapitel. Strahlung der neuen radioaktiven Substanzen. a) Methoden zur Untersuchung der Strahlen; b) Energie der Strahlung; c) Zusammengesetzte Natur der Strahlung; d) Wirkung des Magnetfeldes; e) Ablenkbare β-Strahlen; f) Ladung der ablenkbaren Strahlen; g) Wirkung des elektrischen Feldes auf die ablenkbaren β-Strahlen des Radiums; h) Verhältnis von Ladung zur Masse eines vom Radium emittierten negativ geladenen Teilchens; i) Wirkung des Magnetfeldes auf die α-Strahlen; k) Wirkung des Magnetfeldes auf die Strahlen anderer radioaktiver Substanzen; l) Verhältnis der ablenkbaren β-Strahlen in der Radiumstrahlung; m) Durchdringungsvermögen der Strahlung der radioaktiven Substanzen; n) Ionisierende Wirkung der Radiumstrahlen auf isolierende Flüssigkeiten; o) Verschiedene Wirkungen und Anwendungen der ionisierenden Wirkung der Strahlung radioaktiver Körper; p) Fluoreszenz- und Lichtwirkungen; q) Entwickelung von Wärme durch Radiumsalze; r) Chemische Wirkungen der neuen radioaktiven Substanzen. Färbungen; s) Gasentwickelung in Gegenwart von Radiumsalzen; t) Entstehung von Thermolumineszenz; u) Radiographien; v) Physiologische Wirkungen; w) Wirkung der Temperatur auf die Strahlung. — 4. Kapitel. Induzierte Radioaktivität. a) Mitteilung der Radioaktivität an ursprünglich inaktive Substanzen; b) Aktivierung in geschlossenem Gefäß; c) Rolle der Gase bei den Erscheinungen der induzierten Radioaktivität. Emanation; d) Entaktivierung fester aktivierter Körper in freier Luft; e) Entaktivierung in geschlossenem Gefäß; Zerstörungsgeschwindigkeit der Emanation; f) Natur der Emanation; g) Änderung der Aktivität aktivierter Flüssigkeiten und radiumhaltiger Lösungen; h) Theorie der Radioaktivität; i) Andere Form induzierter Radioaktivität; k) Langsam entstehende induzierte Radioaktivität; l) Induzierte Radioaktivität auf mit Radium zusammen gelösten Substanzen; m) Zerstreuung radioaktiven Staubes und induzierte Aktivität des Laboratoriums; n) Aktivierung ohne Mitwirkung radioaktiver Substanzen; o) Änderung der Aktivität radioaktiver Körper; Wirkung der Auflösung; p) Änderung der Aktivität radioaktiver Körper; Wirkung der Erhitzung; q) Theoretische Deutung der Aktivitätsänderungen der Radiumsalze durch Auflösung oder Erhitzung. — 5. Kapitel. Natur und Ursache der Erscheinungen der Radioaktivität.



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 2

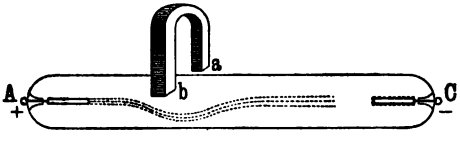
Die Kathodenstrahlen

Von **Dr. G. C. Schmidt**, a. o. Prof. der Physik an der Universität Königsberg. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 50 Abbildungen. VII, 127 S. 1907. Geh. M 3.—, geb. M 3.60.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. 1. Kapitel. Das Wesen des Lichtes. Der Äther. — 2. Kapitel. Neuere Ansichten über die Leitung der Elektrizität durch Elektrolyte. — 3. Kapitel. Apparate zur Erzeugung von Kathodenstrahlen. — 4. Kapitel. Die Entladung in verdünnten Gasen. Die Kathodenstrahlen. — 5. Kapitel. Ältere Theorien über den Entladungsvorgang. — 6. Kapitel. Ladung der Kathodenstrahlen. — 7. Kapitel. Potentialgradienten und Kathodenfall in Entladungsröhren. — 8. Kapitel. Kathodenstrahlen im elektrostatischen Felde. — 9. Kapitel. Kathodenstrahlen im magnetischen Felde. — 10. Kapitel. Energie und Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen. — 11. Kapitel. Zeeman-Effekt. — 12. Kapitel. Kathodenstrahlen verschiedenen Ursprungs. — 13. Kapitel. Bestimmung von e und m. — 14. Kapitel. Scheinbare Masse. — 15. Kapitel. Fluoreszenzerregung und chemische Wirkung der Kathodenstrahlen. — 16. Kapitel. Reflexion, Absorption, Spektrum und Bahn der Kathodenstrahlen in einer Entladungsröhre. — 17. Kapitel. Kanalstrahlen. — 18. Kapitel. Schluß. — Literaturübersicht.

Aus den Besprechungen.

Allgemeines Literaturblatt. „Die Aufklärungen über das scheinbar so rätselhafte Verhalten der radioaktiven Substanzen sind vom Verfasser in ausnehmend interessanter und instruktiver Weise dargelegt und dürften wohl das weiteste Interesse für sich in Anspruch nehmen. Die atomistische Theorie der Elektrizität, welche endlich verspricht, einen Einblick in das Wesen der elektrischen Erscheinungen zu geben und die Frage zu beantworten, deren Lösung jahrhundertelang unmöglich schien: Was ist Elektrizität? basiert auf der Untersuchung der Kathodenstrahlen. Das für weitere Kreise verständlich geschriebene Buch kann wärmstens empfohlen werden. Die Behandlung des Themas ist einfach und gründlich; besonders ist auch die Beigabe einer großen Anzahl höchst klarer, schematischer Zeichnungen zu loben, welche die textliche Klarheit des Buches noch bedeutend erhöhen."



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 3

Elektrizität und Materie

Von Dr. J. J. Thomson, Mitglied der Royal Society, Professor der Experimentalphysik an der Universität in Cambridge. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. Zweite verbesserte Auflage. Mit 21 Abbildungen. VIII, 116 S. 1909. Geh. M 3.—, geb. M 3.60.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Darstellung des elektrischen Feldes durch Kraftlinien. — 2. Kapitel. Elektrische und gebundene Masse. — 3. Kapitel. Wirkungen der Beschleunigung der Faradayschen Röhren. — 4. Kapitel. Die atomistische Struktur der Elektrizität. — 5. Kapitel. Konstitution des Atoms. — 6. Kapitel. Radioaktivität und radioaktive Substanzen. 7. Kapitel. Materie und Äther.

Aus den Besprechungen.

Literarisches Zentralblatt. „Eine Reihe geistvoller Vorträge, in welchen die Bedeutung der neuen Fortschritte in der Elektrizitätslehre für unsere Ansichten über die Konstitution der Materie und die Natur der Elektrizität erörtert wird. Ihre Bedeutung liegt vor allem darin, daß sie eine auch weiteren Kreisen verständliche Verbindung zwischen den Maxwell-Faradayschen Vorstellungen und der modernen Elektronentheorie darstellen und dabei gleichzeitig des berühmten Verfassers eigene Anschauungen über den Aufbau der Atome entwickeln, wobei die radioaktiven Elemente eine besonders eingehende Besprechung erfahren. Die Ausführungen enthalten nur vereinzelte mathematische Ableitungen und können jedem Studierenden empfohlen werden."

Chemiker-Zeitung. ... „Zu der Entwickelung der Elektronik, dieser neuen Disziplin der Physik, hat kaum jemand mehr beigetragen als J. J. Thomson... Es ist deshalb mit besonderer Freude zu begrüßen, daß dieser bahnbrechende Forscher es unternommen hat, seine „Ansichten über die Natur der Elektrizität, über die Vorgänge, welche im elektrischen Felde stattfinden, und über den Zusammenhang zwischen elektrischer und gewöhnlicher Materie" in einer so anschaulichen und anregenden Weise darzulegen, daß jeder Naturwissenschaftler, nicht nur der Physiker, das Buch verstehen kann und durch die Lektüre reichen Genuß und Gewinn haben wird.... Für den Physiker, speziell für den Lehrer der Physik, eine Fundgrube anschaulicher Darstellungen und Gedankengänge. Für den Nichtphysiker eine Anleitung, nicht mühelos, aber doch ohne das schwere Rüstzeug der höheren Mathematik, sich einen Einblick zu verschaffen in die Überlegungen, welche aus den Untersuchungen über Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen und Radioaktivität zu dem Begriffe des Elektrons, des Atoms der Elektrizität, geführt haben."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 4

Die physikalischen Eigenschaften der Seen

Von Dr. Otto Freiherr von und zu Aufsess,
Assistent für Physik a. d. Kgl. techn. Hochschule in München.

Mit 36 Abbildungen. X, 120 S. 1905. Geh. M 3.—, geb. M 3.60.

Inhaltsverzeichnis. Vorbemerkungen: Die Oberfläche eines Sees als Teil der Erdoberfläche. Dichte des Wassers. Hydrostatischer Druck. Kompressibilität des Wassers. — Erster Teil. Mechanik. 1. Fortschreitende Wellen. 2. Stehende Wellen (Seiches). 3. Strömungen. — Zweiter Teil: Akustik. 1. Fortpflanzung des Schalles im Wasser. 2. Fortpflanzung des Schalles an der Oberfläche eines Sees. — Dritter Teil: Optik. 1. Durchsichtigkeit des Seewassers: A. Bestimmung der Durchsichtigkeit durch Versenken eines Gegenstandes; B. Bestimmung der Durchsichtigkeit durch Aufsuchen der Lichtgrenze im See. 2. Erscheinungen der Reflexion, Brechung und Farbenzerstreuung: A. Allgemeine Gesetze; B. Reflexionserscheinungen; C. Brechungserscheinungen; D. Dispersionserscheinungen. 3. Selektive Absorption des Lichtes im Seewasser: A. Allgemeine Theorie; B. Lichtabsorption im Wasser. 4. Polarisation des Lichtes im Wasser. 5. Die Farbe der Seen. — Vierter Teil: Thermik. 1. Thermometrie: A. Allgemeine Thermometrie; B. Spezielle Thermometrie: Oberflächentemperaturen; Tiefentemperaturen; Eisverhältnisse. 2. Kalorimetrie. Schlußbemerkung. Literaturverzeichnis.

Aus den Besprechungen.

Blätter für höheres Schulwesen. „Die Darstellung ist ganz elementar und sehr klar gehalten. Der Inhalt gliedert sich naturgemäß in die Mechanik, Akustik, Optik und Thermik der physikalischen See-Erscheinungen. Besonders interessant sind die Untersuchungen über den so viel diskutierten Grund der Verschiedenfarbigkeit der Seen. Die Erscheinungen des Wasserschattens werden mit dem Brockengespenst in zutreffende Parallele gestellt. Aber von dem allergrößten Interesse sind S. 63 ff. die Ausführungen über die Brechungserscheinungen beim Übergange des Lichtes von Wasser in Luft. Es wird hier ganz elementar nachgewiesen, wie relativ und einseitig unsere Erkenntnis der Dinge ist. Wir sehen alle Gegenstände nur durch das Medium Luft, ein Wasserbewohner sieht dieselben Gegenstände durch das Medium Wasser ganz anders als wir, ja er sieht sogar Sachen, die wir als aus einem Stücke bestehend, als kontinuierliche Massen bezeichnen, in Stücke zerteilt!! Das Buch sei auch für die Schüler der obersten Klasse empfohlen."

Himmel und Erde. „Was der Physiker vom weitverbreitetsten Stoffe auf unserem Erdball, dem Wasser, zu sagen weiß, ist fast lückenlos in dem Aufsessschen Buche zusammengefaßt worden. Wir erfahren etwas über die Wellenbewegung an der Oberfläche, die Strömungen, Fortpflanzung des Schalles im Wasser, über die Durchsichtigkeit und die thermischen Verhältnisse. Besonders eingehend behandelt der Verfasser auf Grund eigener Versuche die Durchsichtigkeit und Farbe der Gebirgsseen, wobei er die Frage entscheidet, ob letztere chemischer oder physikalischer Art ist. Wir empfehlen das Buch besonders allen denen, die es lieben, ihre Erholung in einer liebevollen Betrachtung der Natur zu suchen."

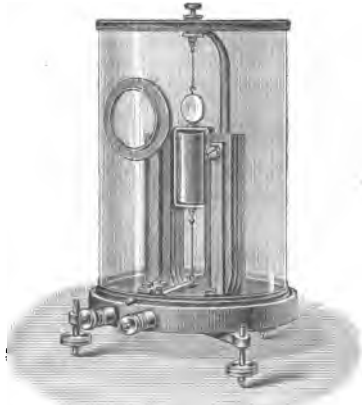
Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 5

Die Entwickelung der elektrischen Messungen

Von Dr. O. Frölich. Mit 124 Abbildungen.
XII, 192 S. 1905. Geh. M 6.—, geb. M 6.80.

Inhaltsverzeichnis. **Die Meßinstrumente.** Die Strommesser. a) Die ersten Galvanometer. Oersted, Schweigger. Ohm, Ampère, Biot-Savart. Nobili, H. Davy, Faraday. Kalibrierung. Methode von Petrina. Formel von Poggendorff. b) Die Spiegelgalvanometer. Gauss. Spiegelablesung. Gauss und W. Weber. Coulomb. Methoden von W. Weber. Telegraphie und Spiegelgalvanometer. Dämpfung. Spätere Spiegelgalvanometer. Spiegelgalvanometer mit Drehspule. c) Galvanometer mit direkter Ablesung und absoluten Angaben. Elektromagnetische Wage. Sinusbussole. Tangentenbussole. Pouillet. Helmholtz. Gaugain. Riecke. Absolutes Maßsystem. Torsionsgalvanometer von Siemens und Halske. Instrumente von Weston. Elektrolytische Strommesser. d) Schalttafelinstrumente. Erfordernisse von Schalttafelinstrumenten. Schalttafelinstrumente mit permanenten Magneten und beweglicher Stromspule. Carpentier. Schalttafelinstrumente mit Eisenkernen. Hitzdrahtinstrumente. e) Galvanoskop. Anwendung für Telegraphie und Messungen. f) Elektrodynamometer und Wechselstrommesser. Elektrodynamometer von W. Weber. Spätere Elektrodynamometer. Andere Instrumente für Wechselstrom. Technische Elektrodynamometer. Energiemessung mittels Elektrodynamometer. Neuere technische Elektrodynamometer. Ferrarisinstrumente. Spannungsmesser. Übersicht. Elektrostatische Spannungsmesser. Kapillarelektrometer. Widerstandsapparate. Maßeinheiten. Widerstandsskalen. Kondensatoren. Selbstinduktionsskalen. Apparate zur Messung magnetischer Eigenschaften. Elektrische Wärmemesser. Elektrizitätszähler. Uhrzähler. Motorzähler. Induktionszähler. Elektrische Registrierapparate. Elektrische Registrierungen. Registrierung elektrischer Vorgänge. Oszillographen. Widerstandsmesser. Elektrische Geschwindigkeitsmesser. Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft. — **Die Meßmethoden.** Die Methoden der Strommessung. Die Methoden der Spannungsmessung. Spannungsmessung durch Strommessung. Spannungsmessung mittels Normalelemente. Transformation der Spannung. Die Methoden der Widerstandsmessung. Methoden von W. Weber. Wheatstonesche Brücke. Formen der Meßbrücke. Temperaturmessung mittels Meßbrücke. Sehr kleine Widerstände; Thomsonsche Meßbrücke. Sehr hohe Widerstände; Kabelmessungen. Einfluß von Ladung und Selbstinduktion. Einfluß von elektromotorischen Kräften; Widerstand von Zersetzungszellen, Batterien usw. Neumann. Kohlrausch. Mance. Lutteroth. Frölich. Fehlerbestimmungen. Messung des Widerstandes aus Strom und Spannung. Isolationswiderstand von Anlagen im Betriebe. Methoden zur Bestimmung der Selbstinduktion. Methoden von Maxwell. Neuere Methoden. Wien. Messungen für Fernsprechzwecke. Die Methoden der Wechselstrommessung. Zusammenstellung. Rückblick.



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 6

Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

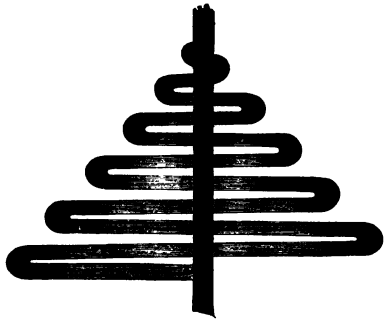
Von **Dr. Josef Ritter von Geitler**, außerordentl. Professor der Physik an der k. k. Deutschen Universität Prag.

Mit 86 Abbildungen. VIII, 154 S. 1905. Geh. M 4.50, geb. M 5.20.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. I. Kapitel. Theorie der Fernwirkungen. Isaac Newton. — II. Kapitel. Theorie der vermittelten Fernwirkung. I. Abschnitt: Michael Faraday. Das magnetische Feld. Das elektrische Feld. Der elektrische Strom. Das elektromagnetische Feld. Die Induktionserscheinungen. Die Erscheinungen der Selbstinduktion. Elektrische Schwingungen. Einige Grundbegriffe aus der Lehre von den Schwingungen. II. Abschnitt: James Clerk Maxwell. Die kritische Geschwindigkeit. Elektromagnetische Lichttheorie. III. Abschnitt: Heinrich Rudolf Hertz. IV. Abschnitt: Die weitere Entwickelung. Methoden zur Beobachtung Hertzscher Wellen. Die elektromagnetischen Wellen und die Optik. a) Längste Wärme- und kürzeste elektrische Wellen. b) Nachahmung optischer Versuche mit Hertzschen Wellen. c) Optische Analogien von Versuchen mit Hertzschen Wellen. d) Der Interferenzversuch von V. v. Lang. e) Spektralanalyse der elektromagnetischen Strahlung. f) Rolle des Leiters bei Drahtwellen. g) Die drahtlose Telegraphie. — Namenverzeichnis.

Aus den Besprechungen.

Annalen der Elektrotechnik. ... „Die vom Verfasser gewählte Art der Darstellung folgt der historischen Entwickelung des Gegenstandes bis in die neueste Zeit und stellt an die mathematische Vorbildung seiner Leser nur die bescheidensten Ansprüche. Die Behandlung des Stoffes ist ausgezeichnet, die Gliederung klar und deutlich, die 86 gut ausgeführten Textfiguren unterstützen und erleichtern ganz wesentlich das Verständnis der für den Nichtphysiker immerhin schwierigen Materie. Da auch die Ausstattung und der Druck in gediegener Weise ausgeführt ist, so kann das Buch auf das wärmste empfohlen werden. Für den Studenten der Physik und Elektrizitätslehre ist das Bändchen als erste Einführung in das genannte Gebiet von großem Nutzen, es gibt aber auch dem gebildeten Nichtphysiker, besonders dem praktischen Elektrotechniker und Ingenieur einen bequemen Überblick über die einschlägigen theoretischen Probleme und deren experimentelle Lösung."



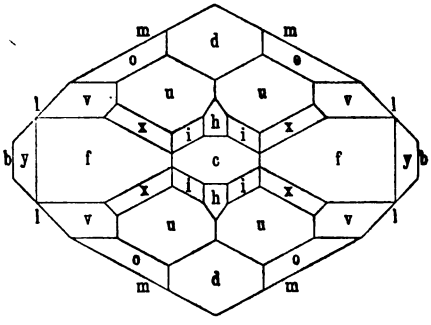
Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 7

Die neuere Entwickelung der Kristallographie

Von Dr. H. Baumhauer, Professor an der Universität zu Freiburg i. d. Schweiz. Mit 46 Abbildungen. VIII, 184 S. 1905. Geh. M 4.—, geb. M 4.60.

Inhaltsverzeichnis. I. Abschnitt. Einleitung. Wesen und Definition eines Kristalls. Fließende und flüssige Kristalle. Zonengesetz und Gesetz der rationalen Achsenschnitte. Kristallographische Symbole. Linearprojektion, gnomonische und sphärische Projektion. Kohäsionsminima innerhalb der Kristalle. — II. Abschnitt. Kristallklassen und Pseudosymmetrie. Einteilung der Kristalle in 32 Klassen. Symmetrieelemente: Zentrum der Symmetrie, Symmetrieebenen, Deck- und Spiegelachsen. Kristallsysteme. Spezielle Ableitung und Besprechung der einzelnen Kristallklassen. Ableitung derselben auf Grund der Deck- und Spiegelachsen. Übersicht über die 32 möglichen Kristallklassen. Pseudosymmetrische Kristalle. — III. Abschnitt. Ermittelung der Symmetrieverhältnisse der Kristalle. Goniometrische Untersuchung, zweikreisiges Goniometer. Physikalische Eigenschaften der Kristalle, insbesondere optisches Verhalten; Zirkularpolarisation optisch-einachsiger und -zweiachsiger Kristalle. Polare Pyroelektrizität. Ätz- oder Lösungserscheinungen. Geometrische Anomalien (vizinale Flächen). Optische Anomalien. Anomale Ätzfiguren. Allgemeinere Bedeutung der Ätzerscheinungen. — IV. Abschnitt. Zwillingsbildung der Kristalle. Zwillingsachsen u. Zwillingsebenen. Allgemeine Zwillingsgesetze. Ableitung der verschiedenen möglichen Fälle von Zwillingsbildung.



Deutung des Vorganges der Zwillingsbildung. Translationsflächen als Zwillingsebenen. Zwillinge von enantiomorphen Kristallen. Begünstigung der Zwillingsbildung. Polysynthetische Verwachsung pseudosymmetrischer Kristalle, Mimesie. — V. Abschnitt. Flächenentwickelung und Wachstum der Kristalle. Entwickelung der Kristallflächen innerhalb der Zonen. Gesetz der Komplikation. Beobachtungen an flächenreichen Zonen; primäre Reihen, sekundäre und tertiäre Flächen. Raumgitter und regelmäßige Punktsysteme. Elementarparallelogramm und Häufigkeit einer Fläche. Einfluß des Lösungsmittels auf die Form der sich ausscheidenden Kristalle. Untersuchungen über das Wachstum der Kristalle. — VI. Abschnitt. Chemische Kristallographie. Isomorphie. Definition derselben. Morphotropie. Topische Achsen. P. v. Groths neuere Auffassung der Kristallstruktur, Morphotropie und Isomorphie. Polymorphe (monotrope und enantiotrope) Modifikationen. Mischungen isodimorpher Körper. Beziehungen zwischen der chemischen Formel und dem Kristallsysteme einer Verbindung. — Anhang. Kristallklassen, Namen und Symbole der Formen nach P. v. Groths physikalischer Kristallographie.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 8

Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorg. Chemie

Von Prof. Dr. A. Werner in Zürich. Zweite Auflage. XV, 292 S. 1909. Geh. M 9.—, geb. M 10.—.

Inhaltsverzeichnis. I. Die Elemente. 1. Der Elementenbegriff. 2. Systematik. — II. Die chemischen Verbindungen. A. Allgemeiner Teil. Lehre von der Valenz. I. Entwickelungsgang der Wertigkeitslehre. II. Über die Valenzzahlen. 1. Die Hauptvalenzzahl. 2. Die Nebenvalenzzahl. 3. Die Koordinationszahl. 4. Die ionogene Nebenvalenzzahl. III. Über die Valenzeinheiten. 1. Einleitung. 2. Definition von Haupt- und Nebenvalenzen. 3. Die Valenzeinheit als gerichtete Einzelkraft. 4. Über das Wesen der Haupt- und Nebenvalenzen. Der übereinstimmende Charakter von Haupt- und Nebenvalenzen. 5. Der elektrochemische Begriff der Hauptvalenz. 6. Der Affinitätswert der Valenzbindungen. IV. Schlußbetrachtungen über Affinität und Valenz. B. Systematischer Teil. I. Die Verbindungen erster Ordnung. 1. Einleitung. 2. Nomenklatur. 3. Systematik. II. Die Verbindungen höherer Ordnung. 1. Halogenosalze und analoge Verbindungen. 2. Verbindungen höherer Ordnung mit Oxyden, Sulfiden usw.: Die Anlagerungsverbindungen; Die Einlagerungsverbindungen. 3. Verbindungen höherer Ordnung mit Nitriden, Phosphiden usw.: Anlagerungsverbindungen; Einlagerungsverbindungen. 4. Verbindungen höherer Ordnung mit Karbiden. 5. Verbindungen höherer Ordnung mit verschiedenen Molekülkomponenten: Anlagerungsverbindungen; Einlagerungsverbindungen. 6. Über mehrkernige Metallammoniake. 7. Über koordinativ ungesättigte Einlagerungsverbindungen. 8. Die Koordinationsverbindungen der Wasserstoffverbindungen. 9. Theorie der Basen und Säuren. 10. Über die inneren Metallkomplexsalze. 11. Über Komplexverbindungen mit negativen Zentralatomen. 12. Über Nebenvalenzverbindungen von Elementen. 13. Allgemeine Betrachtungen über die Bildung von Verbindungen höherer Ordnung. III. Lehre von der Isomerie bei anorganischen Verbindungen. 1. Polymerie. 2. Koordinationsisomerie. 3. Hydratisomerie. 4. Ionisationsmetamerie. 5. Salzisomerie. 6. Strukturisomerie. 7. Raumisomerie. 8. Valenzisomerie. 9. Unaufgeklärte Isomerieerscheinungen.

Aus den Besprechungen.

Chemiker-Zeitung. „Die zweite Auflage des eben genannten Buches, dessen erste Auflage den Lesern dieser Zeitung bestens empfohlen wurde, ist aus dieser durch eine eingehende Umarbeitung und Durcharbeitung unter Berücksichtigung des inzwischen neu gefundenen Tatsachenmaterials entstanden. Ein Hauptunterschied beider Auflagen besteht in der Anordnung. Während in dem früheren zweiten Hauptteile über Verbindungen erster Ordnung und in dem dritten Hauptteile über Verbindungen höherer Ordnung jedesmal die betreffenden Valenzfragen zunächst behandelt und dann die Systematik der Stoffe gegeben wurde, sind jetzt beide Hauptteile vereinigt, wodurch es ermöglicht wurde, die Valenzfragen im Zusammenhange darzustellen. Meines Erachtens hat das Werk dadurch an Klarheit und Übersichtlichkeit erheblich gewonnen. Und das ist gut. Werners gedankenreiche Darlegungen stürzen alte eingewurzelte Anschauungen und setzen Neues an ihre Stelle. Dem zu folgen, erfordert tüchtige Mitarbeit, und jede Erleichterung dabei wird vom Leser mit Dank entgegengenommen. Im speziellen Teile wird die Theorie der Hydrate, der Hydrolyse, der Ammoniumverbindungen besonderes Interesse erwecken." *Heinrich Biltz.*

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 9

Die tierischen Gifte

Von **Edwin S. Faust**, Dr. phil. et med., Privatdozent der Pharmakologie an der Universität Straßburg. XIV, 248 S. 1906. Geh. M 6.–, geb. M 6.80.

Inhaltsverzeichnis. Vorwort. — Einleitung. Zweck und Nutzen einer zusammenfassenden Behandlung der tierischen Gifte. Begriffsbestimmung. Was gehört zu den tierischen Giften? „Aktiv" und „passiv" giftige Tiere. Eigentliche Gifte und gelegentlich die Gesundheit schädigende tierische Produkte. Zoonosen. Historisches über tierische Gifte. Aberglauben. Entwickelung unserer Kenntnisse über dieselben. Praktische Bedeutung der tierischen Gifte für die sie produzierenden Tiere. Praktische Bedeutung der tierischen Gifte für den Menschen: Giftmord, Selbstmord, Hinrichtung von Verbrechern; Verwendung zur Herstellung von Pfeilgiften; Medizinale Vergiftungen durch tierische Gifte; Verwundung durch Bisse oder Stiche giftiger Tiere; Therapeutische Verwendung tierischer Gifte. Systematik. — **Wirbeltiere, Vertebrata.** Säugetiere, Mammalia. Ornithorhynchus paradoxus, Platypus. Das Adrenalin. Die Gallensäuren: Die pharmakologischen Wirkungen der Gallensäuren. Schlangen, Ophidia. Giftschlangen, Thanatophidia. Übersicht. Historisches. Begriffsbestimmung. „Giftige" und „ungiftige" Schlangen. „Verdächtige Schlangen". Systematik und geographische Verbreitung der Giftschlangen. A. Colubridae venenosae, Giftnattern. B. Viperidae. Solenoglypha, Röhrenzähner. Die Giftorgane der Schlangen. Die physiologische Bedeutung des Schlangengiftes. Über die Natur des Schlangengiftes. Wirkungen der Schlangengifte. Natürliche Immunität gewisser Tiere gegen Schlangengifte. Künstliche oder experimentelle Immunisierung gegen Schlangengifte. Angebliche Immunität gewisser Kategorien von Menschen gegen Schlangengift. Therapie des Schlangenbisses. Prophylaxe. Eidechsen, Sauria. Amphibien, Lurche; Amphibia. 1. Ordnung: Anura, schwanzlose Amphibien. 2. Ordnung: Urodela, geschwänzte Amphibien. Fische, Pisces. I. Giftfische. A. Fische, welche durch Biß vergiften. B. Fische, welche durch Stichwunden vergiften. C. Fische, welche ein giftiges Hautsekret bereiten. II. Giftige Fische. III. Vergiftung infolge des Genusses durch postmortale Veränderungen gesundheitsschädlich oder giftig gewordener Fische. — **Wirbellose Tiere, Avertebrata.** Muscheltiere, Lamellibranchiata. Gliederfüßer, Arthropoda. 1. Klasse: Spinnentiere, Arachnoidea. a) Ordnung Scorpionina. Arthrogastra, Gliederspinnen. b) Ordnung Araneina. c) Ordnung Solifugae, Walzenspinnen. d) Ordnung Acarina, Milben. 2. Klasse: Myriapoda, Tausendfüßler. a) Ordnung Chilopoda. b) Ordnung Chilognatha s. Diplopoda. 3. Klasse: Hexapoda, Insekten. a) Ordnung Hymenoptera, Hautflügler. Familie Apidae, Bienen. Familie Formicidae, Ameisen. b) Ordnung Lepidoptera, Schmetterlinge. c) Ordnung Coleoptera, Käfer. d) Ordnung Orthoptera, Geradflügler, Schrecken. e) Ordnung Diptera, Zweiflügler, Fliegen. Crustacea, Massenvergiftungen durch Crangon vulgaris. Würmer, Vermes. Plathelminthes, Plattwürmer. Nemathelminthes, Rundwürmer. Annelida, Ringelwürmer. Stachelhäuter, Echinodermata. Seesterne, Asteroidea. Seeigel, Echinoidea. Seewalzen, Seegurken, Holothurioidea. Coelenterata (Zoophyta), Pflanzentiere. — Namenverzeichnis. — Sachregister.

Aus den Besprechungen.

Repertorium der Praktischen Medizin. ... „Wir haben bis jetzt ein Buch, das in dieser ausführlichen Weise vom Standpunkte des Zoologen, Pharmakologen, Physiologen und Pathologen die tierischen Gifte einer Betrachtung unterwirft, nicht gehabt. Ganz besonders wird uns das Kapitel über Schlangen und Schlangengifte, vor allem auch der physiologische und dann der therapeutische Teil interessieren, wobei der Autor alle Methoden eingehend beschreibt und auf ihren Wert prüft. Einen wertvollen Beitrag bieten die Darlegungen über Immunität und Immunisierung." ...

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 10

Die psychischen Maßmethoden

Von Dr. G. F. Lipps, Privatdozent der Philosophie an der Universität Leipzig. Mit 6 Abbildungen. X, 151 S. 1906. Geh. M 3.50, geb. M 4.10.

Inhaltsverzeichnis. Erster Abschnitt. Psychologie und Naturwissenschaft. 1. Die empirische und die philosophische Weltbetrachtung. 2. Die Bewußtseinsinhalte. — Zweiter Abschnitt. Die Wahrscheinlichkeitslehre. 3. Gewißheit und Wahrscheinlichkeit. 4. Die Wahrscheinlichkeitsbestimmung. — Dritter Abschnitt. Die Maßbestimmungen bei der Berücksichtigung subjektiver Faktoren im Bereiche der naturwissenschaftlichen Forschung. 5. Die Beobachtungsfehler. 6. Die Ungenauigkeit der Sinneswahrnehmung und die sonstigen subjektiven Faktoren. — Vierter Abschnitt. Die psychophysischen Maßmethoden. 7. Der naturphilosophische Standpunkt Fechners und das psychophysische Grundgesetz. 8. Das Maß der Empfindlichkeit. 9. Die Methode der eben merklichen Unterschiede. 10. Die Methode der mittleren Fehler. 11. Die Methode der richtigen und falschen Fälle. 12. Die Methode der mittleren Abstufungen. 13. Die Beobachtungsreihen. 14. Das Fehlergesetz. 15. Die Mittelwerte der Beobachtungsreihen. — Fünfter Abschnitt. Das psychische Maß. 16. Die durch Fechner begründete Auffassungsweise des psychischen Maßes. 17. Ordnen und Messen. — Sechster Abschnitt. Die Methoden der psychischen Abhängigkeitsbestimmung. 18. Die Bestimmung des Grades der Abhängigkeit. 19. Der Typus der Beobachtungsreihe. 20. Die Zerlegung der Beobachtungsreihe in Komponenten und die Bestimmung der Unterschiedsschwelle. — Anhang. 21. Die Berechnung der Mittelwerte. — Literaturverzeichnis. — Register.

Aus den Besprechungen.

Literarisches Zentralblatt. „In der Literatur begegnet man noch so oft unklaren und fehlerhaften Anschauungen über die psychischen Maßmethoden, daß eine umfassende monographische Darstellung der letzteren sicher einem Bedürfnis entspricht. G. F. Lipps gibt nun in der Tat eine Monographie, welche auch zur ersten Einführung in das Gebiet sich recht gut eignet. Er hat sich dabei weiter die doppelte Aufgabe gestellt: einesteils zu zeigen, daß die von Fechner in Anlehnung an das gewöhnliche Fehlergesetz begründeten Maßmethoden unzureichend sind, und anderenteils den Weg anzugeben, auf dem man ohne Voraussetzung eines bestimmten Fehlergesetzes zu einer allen Bedürfnissen der experimentellen Psychologie genügenden Methode der Maß- und Abhängigkeitsbestimmung gelangt. An den Ausfall dieses letzteren Versuches knüpft sich in wissenschaftlicher Beziehung das Hauptinteresse an der Abhandlung des Verfassers."

Physikalische Zeitschrift. „Wer den Wunsch hegt, einen Überblick über das Rüstzeug der messenden Psychologie zu gewinnen, dem wird das vorliegende zehnte Heft der Viewegschen Sammlung „Die Wissenschaft" sehr willkommen sein. Das Buch wird sich bald einen größeren Freundeskreis erwerben."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 11

Der Bau des Fixsternsystems

mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate

Von Dr. Hermann Kobold, außerordentl. Professor an der Universität und Observator der Sternwarte in Kiel.

Mit 19 Abbildungen und 3 Tafeln. XI, 256 S. 1906.
Geh. M 6.50, geb. M 7.30.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. **Erster Abschnitt. Die Instrumente und Beobachtungsmethoden.** 1. Die Ortsbestimmung: Sternbilder. Sternnamen. Sternkoordinaten. Präzession. Relativer Ort. Verwandlung der Koordinaten. 2. Die Helligkeit: Visuelle Helligkeitsbestimmung. Die photometrische Skala. Die Photometer und ihre Theorien. Photographische Sterngrößen. Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre und im Weltenraume. 3. Die Farbe der Gestirne. Die Schmidtsche Skala. Purkinje-Phänomen. 4. Das Spektrum, Vogels Sternklassen. Secchis, Pickerings, Lockyers Klassifizierung. 5. Die Entfernung: Wirkung auf den Ort der Gestirne. Absolute und relative Messung. Photographische Methode. Doppelsterne. Relative und absolute Parallaxe. 6. Die Bewegung: Die Eigenbewegung. Die Radialgeschwindigkeit. Die totale Bewegung. 7. Die Sternverteilung: Die scheinbare Verteilung. Zusammenhang zwischen Sternzahl, Helligkeit und Entfernung. Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre. — **Zweiter Abschnitt. Die Einzelresultate.** 1. Der Sternort: Sternkataloge. Sternkarten. Die Durchmusterungen. Die photographische Himmelskarte. 2. Die Helligkeit. Angaben des Ptolemäus. Schätzungen Argelanders und Goulds. Die photometrischen Messungen und ihre Vergleichung. Sterngröße nach den photographischen Aufnahmen. Photometrische Größe der Sonne. 3. Die Sternfarbe: Osthoffs Katalog. Potsdamer Katalog. Einfluß der Färbung auf die Helligkeitsmessung. 4. Das Spektrum: Spektroskopische Durchmusterungen. Verteilung der Spektra. Verteilung der Sterne der einzelnen Spektralklassen. 5. Die Entfernung: Die Einzelresultate. Sterne mit großer Parallaxe. Zusammenhang zwischen der Entfernung und der absoluten Helligkeit, bzw. dem Spektrum. 6. Die Bewegungen; Kataloge der Eigenbewegungen. Werte der Radialgeschwindigkeiten. Erklärung der Bewegungen. Herschels Arbeiten. Bessels Methode. Die Grundgleichungen zur Bestimmung der Sonnenbewegung. Argelanders, Airys Methode. Kapteyns Bestimmung. Größe der Sonnenbewegung nach diesen Methoden. Die Resultate aus den beobachteten Radialgeschwindigkeiten. Resultate aus den totalen Bewegungen. Unzulänglichkeit der Darstellung und ihre Ursachen. Nichtgeradlinige ungleichförmige Bewegung. Systematische Fehler der Eigenbewegungen. Beziehungen der Bewegungen zur Milchstraße. Schoenfelds Methode und deren Resultate. Bakhuyzens Untersuchungen. Kobolds neue Untersuchungen nach der Bessel-Koboldschen Methode und ihre Resultate. Gegenüberstellung. Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen. Engere Sternsysteme. Beziehungen zwischen der Bewegung und der Helligkeit bzw. dem Spektraltypus. 7. Die scheinbare Verteilung der Sterne und ihre Beziehung zur Milchstraße: Herschels Eichungen. Struves Zählungen. Littrows Bearbeitung der B. D. Houzeaus Zählung. Goulds Kreis. Schiaparellis und Stratonoffs Arbeiten. Pickerings Untersuchungen. Seeligers Darstellung der Sternzahlen. — **Dritter Abschnitt. Der Bau des Fixsternsystems.** 1. Das Phänomen der Milchstraße: Die statistischen Resultate. Seeligers, Plassmanns, Eastons, Stratonoffs und Ristenparts graphische Darstellungen. Charakter und Struktur der Milchstraße. Lage der Milchstraße. 2. Die räumliche Anordnung des Universums: Herschels Sternsystem. W. Struves Theorie. Darstellung der Sternzahlen durch dieselbe. Wert für den Extinktionskoeffizienten. Schiaparellis Annahmen. Seeligers Lösung. Abhängigkeit der Entfernung von der Helligkeit und der Größe der Eigenbewegung. Gyldens und Kapteyns Ausdrücke für die mittlere Parallaxe. Comstocks Untersuchungen an sehr schwachen Sternen. 3. Die Bewegungen im Universum: Argelanders und Mädlers Hypothese. Beobachtungsresultate in Globularsystemen. Mathematische Darstellung. Untersuchung einzelner Spezialsysteme. — Schlußwort. — **Anhang.** 1. Tafel der Sterne mit bekannter Parallaxe. 2. Tafel der Sterne mit großer Eigenbewegung. 3. Literaturverzeichnis. — Register.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 12

Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie

Von Dr. G. Jäger, Professor der Physik an der techn. Hochschule in Wien. Mit 8 Abbildungen. XI, 121 S. 1906. Geh. M 3.50, geb. M 4.10.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung: Grundriß der kinetischen Gastheorie. 1. Boyle-Charlessches Gesetz. 2. Avogadros und Gay-Lussacs Regel. 3. Daltons Gesetz. 4. Zahlenwert der Geschwindigkeit. 5. Maxwells Gesetz. 6. Mittlere Weglänge und Stoßzahl der Molekeln. 7. Spezifische Wärme. 8. Innere Reibung. 9. Wärmeleitung. 10. Diffusion. 11. Größe der Molekeln. 12. Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz. 13. Das Virial. — I. Boltzmanns *H*-Theorem. II. Maxwell-Boltzmannsches Gesetz. III. Gültigkeit des Maxwell-Boltzmannschen Gesetzes für beliebig kleine Kraftfelder. IV. Die Zustandsgleichung schwach komprimierter Gase. V. Der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung. VI. Der Temperatursprung bei der Wärmeleitung. VII. Die ideale Flüssigkeit. VIII. Innerer Druck der Flüssigkeiten. IX. Innere Reibung idealer Flüssigkeiten und Größe der Molekeln.

Aus den Besprechungen.

Chemiker-Zeitung. „Die ausführliche Einleitung des Werkchens gibt eine ausgezeichnete klare Darstellung der kinetischen Gastheorie. Schon wegen derselben kann das Büchlein, das aus der Feder des durch seine „theoretische Physik" wohlbekannten Verfassers hervorgegangen ist, bestens empfohlen werden. Der Hauptteil ist zunächst Boltzmanns Untersuchungen gewidmet. Das H-Theorem und seine Beziehung zum zweiten Hauptsatze der Wärmetheorie finden zuerst ihre Ableitung, sodann die Sätze über Geschwindigkeitsverteilung und Dichteverteilung in einem Gase, in dem innere und äußere Kräfte wirken. Der Verf. verfolgt hier anschauliche und originelle Methoden. Die Anwendung wird auf die Zustandsgleichung nicht zu stark komprimierter Gase gemacht, wobei der Verf. den Arbeiten von M. Reinganum folgt. Der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung, der in letzter Zeit befriedigende Erklärung fand, wird ebenfalls besprochen. Es folgen die Untersuchungen von Smoluchowski über den Temperatursprung der Wärmeleitung in Gasen und eigene Forschungen des Verf. über die Theorie der Flüssigkeiten. Das Büchlein kann daher allen, die sich für die auch in der Elektrizitätslehre immer mehr Bedeutung gewinnende kinetische Theorie interessieren, wärmstens empfohlen werden."

Elektrochemische Zeitschrift. „Mit Bezug auf die Wichtigkeit, die gegenwärtig die Arbeiten über die Elektrizität in Gasen erlangt haben, dürfte die vorliegende kurze und dabei doch in bezug auf die Hauptmomente erschöpfende Zusammenfassung der Resultate der kinetischen Gastheorie nicht unwillkommen sein. Die Darstellung ist eine klare und deutliche und es ist fast durchweg eine eingehende mathematische Begründung gegeben."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 13

Petrogenesis

Von Dr. C. Doelter, o. Professor der Mineralogie und Petrographie an der Universität Graz. Mit einer Lichtdrucktafel und 5 Abbildungen. XII, 262 S. 1906. Geh. M 7.—, geb. M 7.80.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. — **Erstes Kapitel. Das Erdinnere und der Vulkanismus.** Vulkanische Herde. Peripherische Vulkanherde. Ursachen des Aufdringens des Magmas. Eruptionsfähigkeit des Magmas. Verhalten des vulkanischen Magmas beim Erstarren. Verhalten der Gase. Temperatur der Lava. Temperatur der Vulkanherde. — **Zweites Kapitel. Die Erscheinungsformen der vulkanischen Gesteine.** Die vulkanischen Gesteine. Einfluß des Druckes auf die Bildung von Tiefengesteinen. Die Rolle der Mineralisatoren. Das Auftreten der Gesteine. Eruptionsformen der Oberflächengesteine. Viskosität und Lagerungsform. Erscheinungsformen der Tiefengesteine. Mechanismus der Intrusion. Der äußere Habitus der vulkanischen Gesteine. — **Drittes Kapitel. Die Struktur der Eruptivgesteine.** Struktur der Effusivgesteine. Struktur der Tiefengesteine. Spezielle Strukturen. Beziehungen zwischen dem Alter der Gesteine und ihrer Struktur. Änderungen in der Struktur und dem Mineralbestande in verschiedenen Teilen einer Eruptionsmasse. — **Viertes Kapitel. Abhängigkeit der mineralogischen Zusammensetzung der Gesteine von ihrem chemischen Bestande.** Dissoziation des Magmas. Vergleich der Gesteinsmagmen. Graphische Darstellung von Gesteinsmagmen. — **Fünftes Kapitel. Die Differentiation der Magmen.** Das Ganggefolge. Die Hypothese Bröggers. Differentiation bei künstlichen Schmelzen. Magmatische Differentiation durch das spezifische Gewicht. Verhalten fertiger Kristalle im Magma. Die Kristallisationsdifferentiation. Schlieren. Differentiation bei gleichbleibender chemischer Zusammensetzung. Umschmelzungsversuche von Mineralien und Gesteinen. — **Sechstes Kapitel. Die Altersfolge der Eruptivgesteine.** Unterschiede der Altersfolge bei Tiefen- und Effusivgesteinen. Veränderungen der vulkanischen Produkte im Laufe geologischer Perioden. Petrographische Charakteristik und Altersbeziehungen der Gesteine eines Vulkans. — **Siebentes Kapitel. Die Einschlüsse der Gesteine.** Exogene Einschlüsse. Endogene (homöogene) Einschlüsse. Die Olivinknollen. — **Achtes Kapitel. Assimilation und Korrosion.** Ursache der Korrosionen und Resorptionen. Korrosion des Nebengesteins am Kontakt. Assimilation. — **Neuntes Kapitel. Künstliche Gesteine.** — **Zehntes Kapitel. Die Verfestigung des vulkanischen Magmas.** Die Ausscheidungsfolge der Mineralien im Magma. Kristallisationsvermögen und Kristallisationsgeschwindigkeit. Unterkühlung. Einfluß der Schmelzpunkte. Das Kristallisationsmikroskop. Einfluß des Druckes auf die Ausscheidung. Bildung vulkanischer Tuffe. — **Elftes Kapitel. Die Kontaktmetamorphose.** Kaustische Wirkungen. Umwandlung von Kalksteinen. Umwandlung von Sandsteinen, Tonschiefern und Tonen. Chemische Vorgänge bei der Phyllitkontaktmetamorphose. Pneumatolytische Metamorphose. Umwandlung des Diabases und der Diabastuffe. Chemisch-physikalische Vorgänge bei der Kontaktmetamorphose. — **Zwölftes Kapitel. Die Bildung der kristallinen Schiefer.** Allgemeines. Eruptive Gneise. Gneise als umgewandelte Granite. Diagenese. Der Regionalmetamorphismus. Die chemische Zusammensetzung der kristallinen Schiefer. Umwandlung durch Wasser. Umwandlung durch hohe Temperatur. Die Injektionshypothese. Die Dynamometamorphose. Chemische Reaktion im Festen. Die Plastizität der Gesteine. Einfluß des Druckes auf die Löslichkeit von Mineralien. Einseitiger Druck (Streß, Pressung). Zusammenhang der Metamorphose mit der Dislokation. Das Volumgesetz. Der Mineralbestand der kristallinen Schiefer. Struktur und Textur der Schiefergesteine. Ursache der Schiefrigkeit. Die Tiefenstufen. Schwierigkeiten einer allgemeinen Anwendung der Dynamometamorphose. Bildung von kristallinen Schiefern durch Kontaktmetamorphose. Vergleich der Kontaktmetamorphose und der Dynamometamorphose. — **Dreizehntes Kapitel. Sedimente.** Kalksteine. Dolomit. Magnesit. Kieselsinter, Kieselschiefer. Sandsteine. Tone, Kaolin. Äolische Sedimente. Alaunschiefer. Laterit. — **Vierzehntes Kapitel. Chemische Absätze, Bildung von Steinsalz, Gips und Anhydrit.** Absätze der Salzseen. Die Barrentheorie. Gips und Anhydrit. Steinsalz und Abraumsalze. Reihenfolge der Ablagerungen der Salzmineralien. Die Temperatur der Steinsalzlager. Einfluß der Zeit und des Druckes. Salpeter. Soda. — Nachträge. — Autorenregister. — Sachregister.

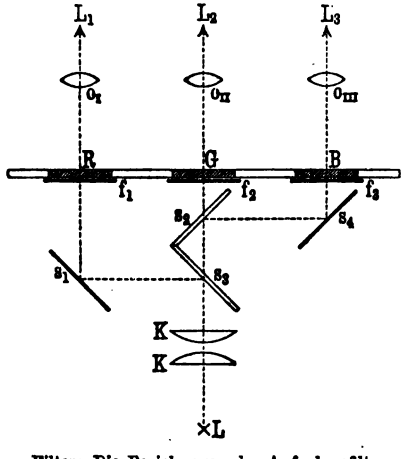
Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 14

Die Grundlagen der Farbenphotographie

Von **Dr. B. Donath.** *Mit 35 Abbildungen und einer farbigen Ausschlagtafel. VIII, 166 S. 1906. Geh. M 5.—, geb. M 5.80.*

Inhaltsverzeichnis. I. Teil. **Die direkten Verfahren der photographischen Farbenwiedergabe.** Farbenwiedergabe. Erstes Kapitel. Die photographische Farbenwiedergabe durch stehende Lichtwellen. Geschichtliches. Theorie des Verfahrens: Begriff des Wellenstrahles. Lichtwellen. Reflexion der Lichtwellen (Phasenverlust). Scheinfarben durch Interferenz. Die Zenkersche Theorie. Experimentelle Beweise für die Richtigkeit der Theorie (Veränderung der Farben mit dem Beobachtungswinkel und durch Auseinandertreten der Elementarspiegel. Komplementäre Farben im durchfallenden Lichte. Nachweis der Elementarschichten in mikroskopischen Dünnschnitten). Weitere theoretische Betrachtungen (Die Beziehungen des Silberkornes zur Schichtenbildung. Die speziellen optischen Eigenschaften von Chromgelatine, kohärentem u. molekularem Silber. Elementarspiegelabstand und Phasenverlust. Abhängigkeit der Farbenwiedergabe von der Expositionszeit. Die Beziehungen der Tiefenwelle zur Oberflächenwelle. Lippmannsche Spektra höherer Ordnung). Praktische Ausübung des Lippmannschen Verfahrens. — Zweites Kapitel. Die photographische Farbenwiedergabe durch Körperfarben. Geschichtliches. Theorie des Verfahrens. Ausübung des Ausbleichverfahrens. — II. Teil. **Die indirekten Verfahren der photographischen Farbenwiedergabe.** Erstes Kapitel. Geschichte und Theorie des Dreifarbenverfahrens. Geschichtliches. Theorie: Additive u. subtraktive Farbenmischung. Geometrische Konstruktion der Mischfarben. Grundfarben. Die Theorien der Farbenwahrnehmung von Young-Helmholtz und Hering. Experimentelle Bestimmung der Grundfarben. — Zweites Kapitel. Die photographische Analyse nach den drei Grundfarben. Sensibilisatoren und Filter: Die Beziehungen der Aufnahmefilter zu den Reproduktionsfiltern und Sensibilisatoren. Die praktische Durchführung der Analyse: Die Sensibilisierung der Platte. Aufnahme und Entwickelung. Einfluß der Schwärzungskurve auf die Richtigkeit der Farbenwiedergabe. — Drittes Kapitel. Die additive Synthese der Teilbilder (Grenzen der authentischen Reproduktion). — Viertes Kapitel. Additive Wiedergabe mit Hilfe von Beugungsspektren (Theorie und Ausübung des Verfahrens). — Fünftes Kapitel. Additive Farbenwiedergabe mit dem Dreifarbenraster. — Sechstes Kapitel. Die subtraktive Synthese der Teilbilder. Theorie: Wahl des Farbensystems. Beziehungen zwischen dem Grundfarbensystem, den Aufnahmefiltern und Sensibilisatoren. Ausführung der subtraktiven Synthese: Die Herstellung transparenter Dreifarbenbilder. Subtraktive Bilder auf reflektierender Grundlage. Der Dreifarbendruck (Flachdruck und Hochdruck). — Literaturverzeichnis. — Namenverzeichnis.



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 15

Höhlenkunde

mit Berücksichtigung der Karstphänomene

Von **Dr. phil. Walter von Knebel.** Mit 42 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. XVI, 222 S. 1906. Geh. M 5.50, geb. M 6.30.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Einführung. 2. Kapitel. Die Ursachen der Höhlenbildung. 3. Kapitel. Die Verteilung der Höhlen in den Gesteinsarten der Erdrinde. 4. Kapitel. Verkarstung und Karstphänomene. 5. Kapitel. Grundwasser und Quellen in Höhlengebieten. 6. Kapitel. Die Korrosion in Karstgebirgen. 7. Kapitel. Die mechanische Tätigkeit des Wassers in bezug auf die Höhlenbildung. 8. Kapitel. Morphologie der Höhlen; natürliches System der Höhlenformen. 9. Kapitel. Höhlenflüsse. 10. Kapitel. Die Vaucluse und die Vauclusequellen. 11. Kapitel. Die Grundwassertheorie zur Erklärung der hydrographischen Probleme des Karstes. 12. Kapitel. Submarine Quellen und Meeresschwinden als Beweise für das Vorhandensein von Höhlenflüssen. 13. Kapitel. Die Entstehung von Höhlenflüssen. 14. Kapitel. Dolinen. 15. Kapitel. Bedeutung der Dolinen für die Entstehung von Tälern. 16. Kapitel. Kesseltäler. 17. Kapitel. Die wichtigsten Höhlengebiete. 18. Kapitel. Halbhöhlen. 19. Kapitel. Ursprüngliche Höhlen. 20. Kapitel. Meteorologische Verhältnisse in Höhlen. 21. Kapitel. Die biologischen Verhältnisse in Höhlen. 22. Kapitel. Höhlen als Wohnorte der prähistorischen Menschen. 23. Kapitel. Kulturarbeit in Höhlengebieten. Geschichte der Höhlenkunde.

Aus den Besprechungen.

Geologisches Zentralblatt. „Verf. hat in diesem Buche die Ergebnisse jahrelanger Studien in verschiedenen Höhlengebieten Deutschlands und im Karst unter Berücksichtigung der umfangreichen Literatur niedergelegt und so ein wissenschaftliches Buch über den Gegenstand verfaßt, über den bisher nur Einzelbeschreibungen vorhanden waren. Gleichzeitig gibt er bestimmte Hinweise und Anleitungen zu gewissenhaften Beobachtungen auf diesem interessanten Gebiet geologisch-geographischer Forschung. Die einschlägige Literatur wird erwähnt und kritisch behandelt..."

Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. „...Der Verfasser hat es verstanden, die einschlägigen Erscheinungen nicht nur in sehr lichtvoller Weise zu beschreiben, sondern auch deren Entstehung in sachgemäßer Weise zu begründen. Die verschiedenen Anschauungen werden gegeneinander abgewogen und in vollkommen objektiver Weise beurteilt. Besonderes Interesse ist im vorliegenden Buche dem Karstphänomene entgegengebracht worden und dies in Anbetracht der Wichtigkeit der Kenntnis dieser Erscheinung für die Bodenkultur mit vollem Rechte. Es findet auch die kulturelle Verwertung verkarsteter Länder die entsprechende Erörterung."

Mitteilungen der Geographischen Gesellschaft für Thüringen. „...Der Verfasser gibt eine erwünschte Gesamtdarstellung der Höhlenkunde und aller damit zusammenhängenden Fragen. Jeder, der sich schnell orientieren will über ein besonderes Kapitel dieser Wissenschaft, wird gern vorliegendes Buch zur Hand nehmen. Die zahlreichen Abbildungen, die dem Werke beigegeben sind, sind recht instruktiv und klar und schließen sich der sonstigen Ausstattung des Buches würdig an."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 16

Die Eiszeit

von Dr. F. E. Geinitz, o. Professor an der Universität Rostock. Mit 25 Abbildungen, 3 farbigen Tafeln und 1 Tabelle. XIV, 198 S. Geh. M 7.—, geb. M 7.80.

Inhaltsverzeichnis. Einführung. Fauna und Flora des Quartärs. Gletscherentwickelung im Quartär. Verbreitung des quartären Glazialphänomens. Frühere Eiszeiten. Landverteilung vor der Eiszeit. Ursache der Eiszeit. Zeitberechnungen. Die Glazialablagerungen. Einfluß der Vereisung auf den Untergrund. — I. Das nordeuropäische Glazial. 1. Gebiet Skandinavien-Rußland-Norddeutschland-Holland. a) Art des Vorkommens und Verbreitung: Skandinavien. Finnland. Rußland. Bornholm. Dänemark. Norddeutschland. Holland. b) Gliederung des nordeuropäischen Quartärs: Präglazial (Altquartär); Fluvioglazial oder Extraglazial. Interglazial. c) Die Verhältnisse nach dem Abschmelzen der Eisdecke (Postglazial, Spätglazial). d) Die postglazialen Niveauschwankungen. 2. Das Glazial Großbritanniens. — II. Das Glazialphänomen der Alpen. — III. Das Gebiet zwischen alpiner und nordischer Vergletscherung. 1. Die extraglazialen Ablagerungen, ihre Gliederung und Beziehung zum prähistorischen Menschen. 2. Die vergletscherten deutschen Mittelgebirge und ihr Vorland. — IV. Eiszeitgletscher im übrigen Europa. — V. Die Eiszeit Nordamerikas. — VI. Die Polarländer. — VII. Die Eiszeit auf den übrigen Kontinenten. Asien. Afrika. Südamerika. Australien. Antarktik. Grahamland.

Aus den Besprechungen.

Zeitschrift für Schulgeographie. „Der bekannte Mecklenburger Forscher auf dem Gebiete der Glazialgeologie hat hier ein Kompendium seines Forschungsgebietes gegeben, wie es knapper und zutreffender kaum gegeben werden konnte. Der Text ist eng zusammengedrängt, nicht gerade leicht zu lesen, erteilt aber dafür über alles, was mit der Eiszeit irgendwie in Beziehung steht, genaue und zuverlässige Auskunft. Man mag sich über die Moorfrage mit Bezug auf Klimaschwankungen oder über die Niveauschwankungen des Baltikums orientieren wollen, alle diese Erscheinungen charakterisiert Geinitz in kurzen treffenden Worten. Das fehlende Register wird durch das eingehende Inhaltsverzeichnis genügend ersetzt, so daß sich das Werk auch zum Nachschlagen sehr eignet..."

Blätter für das bayerische Gymnasialschulwesen. „Der Verfasser gibt an der Hand der neueren Forschungen einen recht anschaulichen Überblick über unser gegenwärtiges Wissen von diesem vielumstrittenen Zeitraum der Erdgeschichte. Daher dürfte dieses Buch, das zum Teil ein Auszug aus seiner größeren Arbeit über das Quartär Nordeuropas ist, besonders dem Geographen willkommen sein; denn dieser Stoff ist in solcher Abrundung mit stetem Hinweis auf die einschlägigen Fragen und literarischen Hilfsmittel meines Wissens sonst nirgends zu finden."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 17

Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie und Metrologie

Von Dr. E. Gehrcke, Privatdozent an der Universität Berlin, technischer Hilfsarbeiter an der physik.-techn. Reichsanstalt. Mit 73 Abbildungen. IX, 160 S. 1906. Geh. M 5.50, geb. M 6.20.

Inhaltsverzeichnis. I. Teil: Allgemeine Einleitung. 1. Wellenbewegung. 2. Lichtwellen. 3. Funktion der Linsen. 4. Das Auge als optischer Apparat. 5. Fernrohr und Mikroskop. 6. Helligkeit der durch Linsen erzeugten Bilder. 7. Wellenlänge, Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Schwingungsdauer. 8. Sinuswellen. 9. Prinzip der Superposition. — II. Teil: Erzeugung und Theorie einiger ausgewählter Interferenzerscheinungen. 10. Fresnels Spiegelversuch. 11. Interferenzen an planparallelen Platten. 12. Interferenzen an keilförmigen Platten. 13. Fresnels Biprisma, Newtons Farbenglas, Michelsons Interferometer. 14. Überlagerung der Interferenzen verschiedener Wellenlängen. 15. Die Quecksilberlampe. 16. Intensitätsverteilung der Interferenzen an planparallelen Platten. 17. Berücksichtigung der vielfach reflektierten Strahlen. 18. Weitere Diskussion der berechneten Intensitätsverteilung. 19. Intensitätsverteilung der Interferenzen im reflektierten Lichte. 20. Planparallele Luftplatte zwischen zwei rechtwinkeligen Glasprismen. 21. Vorhandensein zweier komplementärer Interferenzsysteme im reflektierten Licht. 22. Beugung des Lichtes an einer Öffnung. 23. Beugung an mehreren (spaltförmigen) Öffnungen. — III. Teil: Spektralapparate. 24. Fizeaus Modifikation des Newtonschen Farbenglases. 25. Ausbildung der Fizeauschen Methode durch Michelson. 26. Fraunhofers Beugungsgitter. 27. Reflexionsgitter. 28. Interferometer von Perot und Fabry. Lummers Doppelkeil. 29. Michelsons Stufengitter. 30. Interferenzspektroskop von Lummer und Gehrcke. 31. Allgemeine Theorie aller auf der Erzeugung von Interferenzstreifen beruhender Spektralapparate. 32. Abhängigkeit der Intensitätsverteilung der Interferenzen von der Breite des Kollimatorspaltes. 33. Auflösungsvermögen u. Dispersionsgebiet. 34. Interferenzpunkte. 35. „Falsche" Spektrallinien und ihre Erkennung mit Hilfe der Interferenzpunkte. 36. Auflösungsvermögen des Prismas. 37. Einfluß der Beugung an der Öffnung einer Linse auf die von ihr entworfenen Bilder. Grenze der Auflösung im Fernrohr und Mikroskop. 38. Einfluß der Beugung auf die Sichtbarkeit der Interferenzen an keilförmigen und planparallelen Platten. — IV. Teil: Auswahl von Resultaten der spektroskopischen Forschung über den Mechanismus des Leuchtens. 39. Trabanten. 40. Dopplersches Prinzip. „Breite" der Spektrallinien. 41. Abhängigkeit der Breite der Spektrallinien von der Temperatur, dem Molekulargewicht und der Erregungsart. 42. Der Stark-Effekt. 43. Einfluß des Druckes auf die Wellenlänge. 44. Der Zeeman-Effekt. 45. Theorie des Zeeman-Effektes. 46. Anomaler Zeeman-Effekt. Dissymmetrie in schwachen Feldern. 47. Interferenzfähigkeit des Lichtes einzelner Spektrallinien. 48. Serien. — V. Teil: Anwendungen der Interferenzen zu physikalischen Messungen und in der Metrologie. 49. Bestimmung von Variationen der optischen Dicke sogen. planparalleler Platten. 50. Anwendungen der Interferenzen zu verschiedenen physikalischen Messungen. 51. Anwendungen der Interferenzen in der Astronomie. 52. Interferentialrefraktor von Jamin. 53. Modifikationen von Michelsons Interferometer. 54. Lichtwellen als Längeneinheiten. 55. Michelsons Auswertung des Meters in Lichtwellen. 56. Methode von Benoit zur Bestimmung der Ordnungszahl von Interferenzen. 57. Methode von Perot und Fabry zur Bestimmung der Ordnungszahl von Interferenzen. 58. Einheit der Masse. 59. Methode von Macé de Lépinay zur Messung der Dicke und des Brechungsexponenten planparalleler Platten. 60. Wellenlängennormalen. 61. Interferenzen planparalleler Platten im kontinuierlichen Spektrum. Literaturverzeichnis. Register.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 18

Kinematik organischer Gelenke

Von **Prof. Dr. Otto Fischer** in Leipzig. Mit 77 Abbildungen. XII, 261 S. 1907. Geh. M 8.—, geb. M 9.—.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. 1. Teil: Über die Formen der Gelenkflächen und die aus denselben sich ergebenden möglichen Arten der Gelenkbewegungen. A. Gelenke mit ausgedehntem Flächenkontakt. 1. Gelenke mit starren Flächen. 2. Gelenke mit deformierbaren Flächen. B. Gelenke mit geringem Flächenkontakt. 3. Allgemeine Betrachtungen über die Arten der Gelenkbewegungen. 4. Zylindergelenke. 5. Gelenke mit beliebiger Form der Gelenkflächen. 6. Die Winkelgeschwindigkeiten der verschiedenen Komponenten der allgemeinsten Gelenkbewegung. 7. Einfluß der Deformierbarkeit des Gelenkknorpels auf die Bewegung in Gelenken mit geringem Flächenkontakt. 8. Ausfüllung der Gelenkspalten. — 2. Teil: Über die Bewegungsfreiheit. 9. Die Bewegungsfreiheit in einzelnen Gelenken. 10. Die Bewegungsfreiheit in Gelenksystemen. — 3. Teil: Bewegung in speziellen Gelenken. 11. Allgemeines über die Methoden der Untersuchung spezieller Gelenke. 12. Empirische Ableitung spezieller Bewegungen eines ganzen Gelenksystems. 13. Spezielle Beispiele bestimmter zu einem Gelenk gehörender Relativbewegungen. 14. Bewegungsgesetze in speziellen Gelenken von zwei Graden der Freiheit. Lehrbücher, in denen organische Gelenke behandelt werden. Monographien über Gelenke und Gelenkbewegung. Sachregister.

Aus den Besprechungen.

Deutsche Literaturzeitung. „Das ganze Buch ist mit beneidenswerter Präzision und Prägnanz geschrieben, der Aufwand an Geometrie und Algebra ist so bescheiden, daß man erwarten sollte, Mediziner und Zoologen werden sich durcharbeiten können. Jedenfalls wird es für sie die beste Einführung in die Gelenkmechanik sein. Für alle aber, die das Studium der Gelenke als Spezialität betreiben, wird die Fischersche Kinematik ganz unentbehrlich sein."

Leipziger Medizinische Monatsschrift. „...Wenn Fischer, der durch seine Forschungen auf diesem Gebiete längst bekannt ist, auch in bescheidener Weise sagt, daß sein Werk kein Lehrbuch der in den lebenden Körpern vorkommenden speziellen Gelenke sein soll, so müssen wir es doch als ein solches ansehen, denn er hat es verstanden, uns in klarer und übersichtlicher Weise die Verhältnisse, auf die es ankommt, darzulegen. Wir haben die meisten Werke, die sich mit dem Gegenstande der Gelenklehre oder der Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes beschäftigen, in der Hand gehabt, müssen aber sagen, daß uns keines eine derartige präzise Auskunft und klare Vorstellung der Verhältnisse gegeben hat wie die Kinematik Fischers..."

Reichs-Medizinal-Anzeiger. „Der Aufgabe der organischen Kinematik, die kinematischen Gesetze besonders den Zoologen, den Medizinern und den gebildeten Laien klar zu machen, hat Verf. sich in dem vorliegenden Buche unterzogen und diese Aufgabe vorzüglich gelöst..."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 19

Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer

Von **Dr. A. Wangerin,** *Professor an der Universität Halle a. S. Mit einer Textfigur und einem Bildnis Neumanns in Heliogravüre. X, 185 S. 1907. Geh. M 5.50, geb. M 6.20.*

Inhaltsverzeichnis. Erster Teil: Franz Neumanns Leben. — Zweiter Teil: Neumanns wissenschaftliche Arbeiten. 1. Die kristallographisch-mineralogischen Arbeiten. 2. Arbeiten zur Wärmelehre. 3. Arbeiten aus der Optik und Elastizitätstheorie. 4. Arbeiten über induzierte Ströme. 5. Mathematische Arbeiten. 6. Wissenschaftliche Untersuchungen Neumanns, die nicht von ihm selbst veröffentlicht sind. — Dritter Teil: Vorlesungen, Seminar, Laboratorium. 1. Die gedruckten Vorlesungen. 2. Das Seminar. 3. Neumanns Bestrebungen zur Errichtung eines physikalischen Laboratoriums.

Aus den Besprechungen.

Die Physikalische Zeitschrift schreibt: „Die Materie des letzterschienenen Heftes der Sammlung »Die Wissenschaft« bildet die Biographie eines großen Gelehrten, des Königsberger Physikers und Mathematikers Franz Neumann. Nicht mit Flittern äußeren Glanzes umgibt A. Wangerin die markante Persönlichkeit dieses Mannes, für dessen edle Bescheidenheit und herzgewinnende Güte er aber nicht genug Worte finden kann. In schlichten einfachen Worten schildert der Verfasser die harten Entwicklungsjahre mit ihren zahlreichen Entbehrungen, die der Lehrer und Forscher Neumann durchzumachen hatte, um sich dann eingehend mit Neumanns wissenschaftlichen Arbeiten zu befassen. Neumanns erste Arbeiten liegen auf kristallographisch-mineralogischem Gebiet. Später sind es Beiträge zur Wärmelehre, Optik und Elastizitätstheorie. Aus der Elektrizitätslehre bearbeitete er die induzierten Ströme. Seine bedeutendste mathematische Arbeit ist diejenige über Kugelfunktionen. Das Buch enthält ferner Mitteilungen über Arbeiten aus Neumanns Seminar und Laboratorium.

Nicht ohne ein gewisses Mitleid wird man das letzte Kapitel lesen, welches von Neumanns Bestrebungen zur Errichtung eines physikalischen Laboratoriums berichtet..."

Deutsche Literaturzeitung. „... Einer der ältesten überlebenden Schüler Fr. Neumanns, Prof. A. Wangerin in Halle, hat sich der Aufgabe unterzogen, Fr. Neumann als Forscher und Lehrer zu schildern, und nicht nur die anderen Schüler des großen und trefflichen Mannes, zu denen auch der Ref. sich zählt, alle Physiker sind dem Verfasser dafür zu Dank verpflichtet, daß er mit solcher Hingabe und mit solcher Beherrschung des Stoffes seine Aufgabe gelöst hat. Auch bezüglich der Beurteilung der verschiedenen Neumannschen Leistungen kann sich der Ref. in allen wesentlichen Punkten dem Verf. völlig anschließen..."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 20

Die Zustandsgleichung der Gase
und Flüssigkeiten und die Kontinuitätstheorie

Von **Prof. Dr. J. P. Kuenen** in Leiden. Mit 9 Abbildungen. X, 241 S. 1907. Geh. M 6.50, geb. M 7.10.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Kondensationserscheinungen und Kontinuitätsprinzip. 2. Kapitel. Kinetische Theorie idealer Gase. 3. Kapitel. Kinetische Theorie unvollkommener Gase: Zustandsgleichung. 4. Kapitel. Erklärung der Verflüssigungserscheinungen nach der Zustandsgleichung; Erweiterung der Kontinuitätstheorie. 5. Kapitel. Anormale Kondensations- und kritische Erscheinungen: A. Nichtkonstanz des Dampfdruckes. B. Kritische Erscheinungen. 6. bis 9. Kapitel. Vergleich der Zustandsgleichung mit der Erfahrung: A. Kritische Gleichungen. B. Homogene Zustände. C. Sättigungsgebiet. D. Thermische Größen. 10. Kapitel. Molekulare Dimensionen. 11. Kapitel. Gesetz der korrespondierenden Zustände. Gleichförmigkeitsprinzip. 12. und 13. Kapitel. Verbesserung der Zustandsgleichung; Anzuwendende Merkmale: A. Theorie der Volumkorrektion. B. Theorie der molekularen Attraktion: Verbesserung der beiden Korrektionsglieder. 14. Kapitel. Mathematische Methoden der Herleitung der Zustandsgleichung.

Aus den Besprechungen.

Physikal.-chemisches Zentralblatt. „Der Verf. hat eine schwierige Aufgabe übernommen, in Form einer Monographie das im Titel bezeichnete Thema zu bearbeiten. Sicher vielen wird das vorliegende Buch willkommen sein.

Die wohlgeordnete Zusammenfassung des Bekannten und die objektive und kritische Behandlungsweise machen es einerseits dem Fachmanne wertvoll, der eine Fülle von Anregungen zur weiteren theoretisch-mathematischen oder experimentellen Ausgestaltung des Problems finden wird. Besonders das bis jetzt zutage geförderte experimentelle Material ist absolut unzulänglich, hier harrt noch ein großes, fruchtbares, aber auch äußerst schwieriges Gebiet der eingehenden experimentellen Bearbeitung.

Anderseits sind einzelne Kapitel allgemeineren Inhalts so einfach und anregend geschrieben, daß diese vereint auch dem Anfänger mit mäßigen Kenntnissen in der höheren Mathematik ein abgerundetes Bild über das Wesen und die Erfolge der Zustandsgleichung und der sich ihr anschließenden Fragen geben können.

Lobend sei noch der sorgfältigen Literaturangaben gedacht und deren zweckmäßigen systematischen Zusammenstellung am Schlusse jedes größeren Kapitels."

Jahrbuch der Chemie. „... Die Darstellung der vorliegenden Monographie ist mustergültig und setzt, was vielen Chemikern besonders erwünscht sein dürfte, kein allzu großes Maß mathematischer und theoretisch-physikalischer Kenntnisse voraus."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 21

Radioaktive Umwandlungen

Von **E. Rutherford**, Professor der Physik an der Mc Gill-Universität in Montreal. Übersetzt von M. Levin. Mit 53 Abbildungen. VIII, 285 S. 1907. Geh. M 8.— geb. M 8.60.

Inhaltsverzeichnis. The Silliman Foundation. — Preface. — Vorbemerkung zur deutschen Ausgabe. — Kapitel 1. Historische Einleitung. — Kapitel 2. Die radioaktiven Umwandlungen d. Thoriums. — Kapitel 3. Die Radiumemanation. — Kapitel 4. Die Umwandlungen des aktiven Niederschlages des Radiums. — Kapitel 5. Der langsam sich umwandelnde aktive Niederschlag des Radiums. — Kapitel 6. Ursprung und Lebensdauer des Radiums. — Kapitel 7. Die Umwandlungsprodukte des Uraniums und Aktiniums und der Zusammenhang zwischen den Radioelementen. — Kapitel 8. Die Entstehung von Helium aus Radium und die Umwandlung der Materie. — Kapitel 9. Die Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre. — Kapitel 10. Die Eigenschaften der α-Strahlen. — Kapitel 11. Radioaktive Prozesse im Lichte physikalischer Anschauungen.

Aus den Besprechungen.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. „... Im März 1905 hat Rutherford an der Yale University eine Reihe von Vorlesungen gehalten, die hauptsächlich des Verf. eigenstes Arbeitsgebiet, die radioaktiven Umwandlungen, zum Gegenstand hatten. In der vorliegenden Veröffentlichung sind indessen alle bis zum Beginn von 1907 erschienenen Arbeiten berücksichtigt. Dem Buch haftet noch in der Übersetzung etwas von der lebhaften Frische des Vortrages an. Meisterhaft in ihrer klaren Knappheit ist die historische Einleitung, die uns zeigt, wie in ca. 10 Jahren durch das Handinhandarbeiten von Physikern und Chemikern aller Länder unsere Kenntnisse von Materie und Strahlung erweitert und vertieft worden sind. Den kühnsten Schritt tat eben Rutherford in der Aufstellung der Umwandlungshypothese, die alle bisherigen Anschauungen von Elementen und Atomen umstieß, aber eine Fülle von Erscheinungen zusammenfaßte, die vorher nur verwirrten. Die Hypothese reicht noch jetzt aus, um alle seit ihrer Aufstellung gefundenen Tatsachen zu erklären, und dennoch — zum Lobe des Autors sei es besonders hervorgehoben — weiß Rutherford scharf zwischen Beobachtung und Spekulation, zwischen der Tatsache und ihrer vermutlichen Erklärung zu unterscheiden. — Jedes Wort der Empfehlung ist bei diesem Buche überflüssig."

Literarisches Zentralblatt. „... Die Vorträge sind in anregender und so anschaulicher Form niedergeschrieben, daß Physiker und Nichtfachmann, sofern er über einige naturwissenschaftliche Bildung verfügt, Genuß und Gewinn durch die Lektüre haben wird. Für den Fachmann ist das Heft eine Quelle anregender Gedanken und Anschauungen, während der Laie eine gute Einführung in unsere gegenwärtige Kenntnis der Radioaktivität vorfindet, neben welcher die Atomzerfallstheorie, die Elektronentheorie zur Erörterung gelangt und die Bedeutung für unser Wissen von der Luftelektrizität sowie für den Ausbau und die Bestätigung wichtiger physikalischer Grundanschauungen gebührend geltend gemacht wird."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 22

Kant und die Naturwissenschaft

Von Prof. Dr. Edm. König in Sondershausen.

VI, 232 S. 1907. Geh. M 6.—, geb. M 7.—

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Naturwissenschaft und Naturphilosophie. — 2. Kapitel. Kant und die Naturwissenschaft seiner Zeit. 1. Einfluß der Naturwissenschaft auf Kants Philosophie. 2. Kant als Naturforscher. — 3. Kapitel. Die Leitsätze der kritischen Erkenntnislehre. 1. Die kritische Fassung des Erkenntnisproblems. 2. Anschauung und Denken — Aposteriori und Apriori. 3. Der Raum. 4. Die Denkformen (Kategorien). 5. Grenzen der Erkenntnis — Endergebnisse. — 4. Kapitel. Kants Einwirkung auf die Naturwissenschaft des 19. Jahrhunderts. — 5. Kapitel. Das Problem des Raumes und der Bewegung. 1. Der Anschauungsraum. 2. Der Raum der Geometrie. 3. Der physische Raum. — 6. Kapitel. Erscheinung und Wesen — Erfahrung und Theorie (Kritik des Phänomenalismus). — 7. Kapitel. Das physikalische Problem. 1. Die Grundlagen der mechanischen Naturanschauung. 2. Die Prinzipien der Mechanik. 3. Die Konstitution der Materie. 4. Kinetik und Energetik. — 8. Kapitel. Das biologische und das psychophysische Problem. 1. Gegensatz der mechanistischen und der teleologischen Biologie. 2. Der Zweckbegriff bei Kant. 3. Ist der Zweckbegriff Kategorie? 4. Die Hauptformen der naturwissenschaftlichen Teleologie. 5. Die psychophysische Kausalität. 6. Schluß. Zusätze.

Aus den Besprechungen.

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. „Der Verfasser sucht zu zeigen, daß insbesondere die erkenntnistheoretischen Anschauungen Kants, denen sich die Erkenntnistheorie der neueren Naturwissenschaft in verschiedenen wesentlichen Punkten in bemerkenswerter Weise ganz von selbst genähert hat, mit den Ergebnissen der naturwissenschaftlichen Forschung durchaus vereinbar und geeignet sind, als Grundlage für eine einheitliche Lösung der naturphilosophischen Probleme zu dienen. Das Buch wird allen denen willkommen sein, die sich allgemein über die Hauptströmungen in der heutigen Naturphilosophie unterrichten möchten. Die Ingenieure werden die Kapitel über Raum und Bewegung, über die Grundlagen der mechanischen Naturanschauung, über die Prinzipien der Mechanik und über Kinetik und Energetik besonders interessieren."

Chemiker-Zeitung (am Schluß einer langen Besprechung). „... Im Rahmen einer Besprechung, selbst einer (mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des Gegenstandes) schon ungewöhnlich langen, kann natürlich weder auf Einzelheiten eingegangen, noch mit dem Verfasser über deren Auffassung und seinen Gesamtstandpunkt gerechtet werden; doch dürften schon obige Andeutungen genügen, um die Leser dieser Zeitschrift auf die Fülle wichtiger Lehren und Gedanken hinzuweisen, die das Königsche Buch enthält, und die namentlich den Naturforscher anregen sollten, auch seinerseits weiter zu denken und, unbeirrt durch jegliche Autorität, nach fernerer Aufklärung zu streben. »Aufgeklärt sein«, so sagt Kant, »heißt: den Mut haben, sich seines eigenen Verstandes zu bedienen«.

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 23

Synthetisch-organische Chemie der Neuzeit

Von Dr. Julius Schmidt, a. o. Professor an der Königl. Technischen Hochschule in Stuttgart. X, 185 S. 1908. Geh. M 5.50, geb. M 6.20.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. Erläuterung des Begriffes Synthese. Historische Bemerkungen. Über die Behandlungsweise des Stoffes. Kohlensuboxyd. Knallsäure. — 1. Kapitel. Bedeutung der Organomagnesiumhaloide für synthetische Zwecke. — 2. Kapitel. Einige synthetische Ergebnisse aus der Zuckergruppe. Asymmetrische Synthese. — 3. Kapitel. Synthetische Reaktionen, welche zu Aldehyden und Ketonen führen. — 4. Kapitel. Dimethylsulfat als Methylierungsmittel. — 5. Kapitel. Synthesen mit Hilfe von Aziden. — 6. Kapitel. Methoden von E. Fischer zur Synthese von Polypeptiden. — 7. Kapitel. Synthesen durch Aufspaltung und Umwandlungen zyklischer Basen. — 8. Kapitel. Synthesen auf dem Gebiete der Alkaloidchemie, der künstlichen Arzneimittel und in der Puringruppe. — 9. Kapitel. Synthesen von Farbstoffen und mehrkernigen aromatischen Verbindungen. — 10. Kapitel. Synthesen von Riechstoffen, von hydroaromatischen und diesen nahestehenden Verbindungen. — 11. Kapitel. Synthesen verschiedener organischer Verbindungen auf elektrochemischem Wege. — Namenregister. — Sachregister.

Aus den Besprechungen.

Literarisches Zentralblatt. „Das 23. Heft der »Wissenschaft« bildet eine höchst willkommene Ergänzung unserer Lehrbücher der organischen Chemie in mehrfacher Hinsicht. Enthält es doch neben den kurz angedeuteten üblichen Synthesen in ausführlicher Besprechung neuere Verfahren, welche in den Lehrbüchern nicht oder höchstens ganz oberflächlich gestreift werden, so namentlich die vielseitige Anwendung der Organomagnesiumhaloide, stets unter eingehender Würdigung des wirtschaftlichen Wertes der betreffenden Methode. Da die Darstellungsverfahren der Duftstoffe, Farbstoffe und Heilmittel ebenfalls in den Rahmen der Besprechung fallen und das Buch bei aller wissenschaftlichen Strenge doch leicht faßlich geschrieben ist, so kann es unbedenklich nicht nur dem Fachmann, sondern auch weiteren Kreisen (Pharmazeuten, Physiologen, Ärzten usw.) nachdrücklich empfohlen werden."

Zentralblatt für Pharmazie und Chemie. „Die synthetisch-organische Chemie hat in der Neuzeit, d. h. in den letzten 10 bis 15 Jahren Errungenschaften aufzuweisen von so allgemeinem Interesse, wie sie sich nie hatten voraussehen lassen. Die vorliegende Schrift soll ein Bild derselben entwerfen. In ihr sind die außerordentlich zahlreichen Ergebnisse je nach ihrer größeren oder geringeren Bedeutung mehr oder weniger ausführlich behandelt worden. Dabei hat der Verfasser mit Rücksicht auf den größeren Leserkreis, für den das Buch bestimmt ist, für eine leicht faßliche, aber doch streng wissenschaftliche Form des meist aus den Quellen geschöpften Materials Sorge getragen und auch die Wichtigkeit einschlägiger Entdeckungen in wirtschaftlicher Hinsicht entsprechend gewürdigt.

Gerade das vorliegende Thema mit seinen mannigfachen Beziehungen zum praktischen Leben dürfte verhältnismäßig leichter als manch anderes abstrakteres Gebiet der Naturwissenschaften das Interesse eines weiteren Kreises fesseln..."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 24

Die chemische Affinität und ihre Messung

Von Dr. Otto Sackur, Privatdozent an der Universität Breslau. Mit 5 Abbildungen. VIII, 130 S. 1908. Geh. M 4.—, geb. M 4.80.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Die historische Entwickelung des Affinitätsbegriffes. Ältere Anschauungen über die chemische Verwandtschaftskraft. Die Abhängigkeit der Affinität von der Menge der sich umsetzenden Stoffe. Die Avidität der Säuren und Basen. Quantitative Messung der Affinität in mechanischem Maße. Definition der Affinität als maximale Arbeit nach van 't Hoff. — 2. Kapitel. Der Begriff der maximalen Arbeit und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Das Thomson-Berthelotsche Prinzip. Der erste Hauptsatz. Der zweite Hauptsatz. Die maximale Leistung einer Arbeitsmaschine. Der Carnotsche Kreisprozeß. Die Arbeitsleistung chemischer Vorgänge. Die Helmholtzsche Gleichung. — 3. Kapitel. Die Berechnung der Affinität aus dem Betrage der Umsetzung. I. Reaktionen im homogenen System. a) Zwischen Gasen: Thermodynamische Ableitung des Massenwirkungsgesetzes; Experimentelle Bestimmung von Gasgleichgewichten (Statische Methoden. Dynamische Methoden). b) Reaktionen in Lösungen: Die Avidität von Säuren und Basen. II. Reaktionen im heterogenen System. a) Zwischen festen Stoffen und Gasen: Experimentelle Methoden zur Bestimmung d. Dissoziationsspannung; Berechnung der Affinität der Metalle zum Sauerstoff und den Halogenen. b) Reaktionen zwischen festen Stoffen und Lösungen. c) Affinität zwischen festen Stoffen. — 4. Kapitel. Elektrische Methode der Affinitätsmessung. Die maximale Arbeit eines galvanischen Elementes. Ketten vom Typus des Daniellelementes. Konzentrationsketten. Affinität der Komplexbildung. Das absolute Potential. Gasketten. Oxydations- und Reduktionsketten. — 5. Kapitel. Affinität und Temperatur. Die Gleichung der Reaktionsisochore. Berechnung der Affinität aus der Wärmetönung. Die Affinität in der Nähe des Umwandlungspunktes. Änderung der Wärmetönung mit der Temperatur. Die Nernstsche Theorie zur Berechnung von Gleichgewichten aus thermischen Größen. 6. Kapitel. Ergebnisse der Affinitätsmessung. Reaktionen zwischen Verbindungen. Reaktionen zwischen den Elementen. — Schlußbetrachtung.

Aus den Besprechungen.

Chemiker-Zeitung. „Die Aufgabe, die sich der Verfasser in der vorliegenden Monographie gestellt hat, den großen Fortschritt, den die Chemie der thermodynamischen Betrachtungsweise verdankt, anschaulich darzustellen, hat er in sachgemäßer Weise und Form gelöst. Das Buch übermittelt trotz seiner kurzen Fassung die wesentlichsten Errungenschaften der chemisch verwerteten Thermodynamik prägnant und zuverlässig, so daß es dem engeren und weiteren Kreise der Fachgenossen Belehrung und Anregung gibt. ... Das Buch ist jedem zu empfehlen, der eine nicht an der Oberfläche haftende Kenntnis des Gegenstandes in großen Zügen sich aneignen will, zumal dem Studierenden als Ergänzung und Unterstützung bei thermodynamischen Vorlesungen."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 25

Die Korpuskulartheorie der Materie

Von Dr. J. J. Thomson, Mitgl. der Royal Society, Professor der Experimentalphysik an der Universität in Cambridge und Professor der Physik an der Royal Institution in London. Autoris. Übersetzung von G. Siebert. Mit 29 Abbildungen. VIII, 166 S. 1908. Geh. M 5.—, geb. M 5.80.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Einleitung. Korpuskeln in Vakuumröhren. 2. Kapitel. Der Ursprung der Masse der Korpuskel. 3. Kapitel. Eigenschaften einer Korpuskel. 4. Kapitel. Korpuskulartheorie der Leitung in Metallen. 5. Kapitel. Die zweite Theorie der elektrischen Leitung. 6. Kapitel. Die Anordnung der Korpuskeln im Atom. 7. Kapitel. Über die Anzahl der Korpuskeln im Atom. — Register.

Aus den Besprechungen.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. „In dem vorliegenden Werke legt der Verfasser, der den Physikern als einer der geistreichsten Forscher auf dem Gebiete der Elektronik wohl bekannt ist, seine Anschauungen über den Aufbau der Materie in ziemlich populärer Form dar. Das Buch ist also als eine Fortsetzung und Erweiterung der im Jahre 1904 ebenfalls deutsch in der Sammlung »Die Wissenschaft (Heft 3)« erschienenen Vorträge »Elektrizität und Materie« anzusehen.

In der neuen Schrift werden zunächst die grundlegenden Tatsachen der Elektronentheorie besprochen. Daran schließt sich ein Kapitel, in dem die Frage nach dem Ursprung der Masse der Elektronen mit dem Ergebnis diskutiert wird, daß die Masse der Elektronen nur scheinbar materiell, in Wahrheit aber elektromagnetischer Natur sei. Eingehend wird die Korpuskulartheorie der Wärme- und der Elektrizitätsleitung in Metallen behandelt und gezeigt, daß von den beiden konkurrierenden Theorien die eine, nach der die die Leitung der Wärme und Elektrizität besorgenden Elektronen insofern dauernd im Metall frei sind, als sie mit den Atomen ihrer Umgebung, von denen sie sich durch Dissoziation getrennt haben, in einer Art von Temperaturgleichgewicht stehen, zu einem Widerspruch mit der Erfahrung führt, indem der Wert für die spezifische Wärme der Metalle, wenn sie richtig wäre, viel größer (bei Silber zehnmal so groß) sein müßte, als er tatsächlich ist. Die andere Theorie, welche voraussetzt, daß die Elektronen nicht dauernd, sondern nur während der kurzen Zeit frei sind, die sie zur Zurücklegung des Weges von einem Atom zum Nachbaratom brauchen, vermeidet diese Schwierigkeit, und ihr ist, da sie alle anderen Beobachtungen ebensogut wie die erste Theorie erklärt, der Vorrang zu geben. Zwei Kapitel über den Aufbau der chemischen Atome aus positiver Elektrizität und negativen Elektronen und deren Anordnung im Atom beschließen das Buch...

Die Lektüre der »Korpuskulartheorie der Materie« ist nicht leicht, aber sie bietet dem, der die Mühe der Durcharbeitung nicht scheut, einen großen Genuß."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 26

Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffs in Natur und Technik

Von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Mit 16 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. VIII, 132 S. 1908. Geh. M 4.50, geb. M 5.20.

Inhaltsverzeichnis. I. Einleitung. — II. Die Hauptquellen des gebundenen Stickstoffs. — III. Bindung von Stickstoff ohne Mitwirkung von Organismen. — IV. Die Bindung von atmosphärischem Stickstoff durch frei lebende Bakterien. 1. Grundlagen und Vorarbeiten. 2. Clostridium pasteurianum Win. und Verwandte. 3. Die Azotobaktergruppe und sonstige stickstoffsammelnde Bakterien. 4. Stickstoffbindung auf künstlichen Nährböden. — V. Die Stickstoffbindung durch frei lebende Bakterien im Boden. — VI. Stickstoffbindung durch sonstige frei lebende Organismen. — VII. Stickstoffbindung durch Bakterien und sonstige Mikroorganismen im Verein (Symbiose) mit grünen Pflanzen. 1. Grundlagen und Vorarbeiten. 2. Die Züchtung der Knöllchenerreger auf künstlichem Nährboden. 3. Knöllchenbakterien und Wirtspflanzen. — VIII. Die Bodenimpfung mit Knöllchenbakterien. — IX. Leguminosen als Stickstoffsammler in der Praxis. — X. Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffs in der Technik. 1. Die Gewinnung des Luftstickstoffs mit Hilfe der Elektrizität. 2. Kalkstickstoff und Stickstoffkalk. — Schlußbetrachtung. — Register.

Aus den Besprechungen.

Monatsblätter des wissenschaftlichen Clubs in Wien. „Drohende Erschöpfung der Salpeterfundstätten, zunehmende Verwendung stickstoffhaltiger Düngmittel in der Landwirtschaft, anwachsender Bedarf von Salpetersäure in der chemischen Industrie machen es zu einem der wichtigsten Probleme der Hand in Hand arbeitenden technischen und Naturwissenschaften, sich in der Herstellung stickstoffhaltender und stickstoffabgebender Substanzen von dem gebundenen Stickstoff unabhängig und das unendliche Stickstoffreservoir der atmosphärischen Luft der Menschheit nutzbar zu machen.

Soviel man weiß, wird Stickstoff in der Natur von gewissen Pflanzen assimiliert unter Vermittlung lebender Organismen, lösliche Stickstoffverbindungen bilden sich in geringer Menge in der Luft, aber die fortgeschrittene Technik unserer Zeit hat ein Verfahren gefunden, den fast reaktionsunfähigen trägen Stickstoff der Luft durch Überleiten über erhitzte Karbide technisch zu verwerten und als jüngstes Glied in der Kette epochaler Erfolge der Elektrochemie den Stickstoff der Luft durch Durchleiten im elektrischen Flammenbogen zu oxydieren und sodann in lösliche Salze überzuführen.

Das hübsch illustrierte Büchlein, das das 26. Heft der im Viewegschen Verlage erscheinenden Sammlung »Die Wissenschaft« bildet, legt das Hauptgewicht der Darstellung auf die Assimilation des Stickstoffes durch lebende Organismen, welcher Abteil ungefähr die Hälfte der Seitenzahl umfaßt. Die Darstellung ist klar, ungemein populär und gleichzeitig wissenschaftlich, für die Interessenten der Frage, als da sind: Chemiker, Techniker, Landwirte, Volkswirtschaftler und Biologen ist es bestens zu empfehlen."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 27

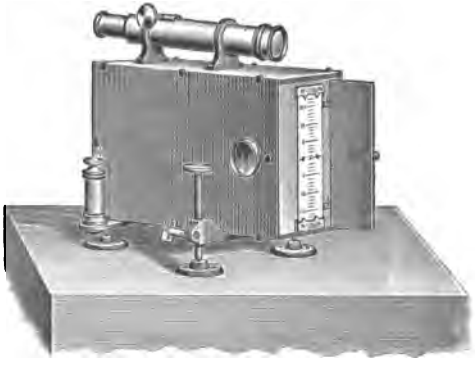
Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche

Von **Prof. Dr. Joh. Bapt. Messerschmitt,**
Konservator des Erdmagnetischen Observatoriums und der Erdbebenhauptstation in München. Mit 25 Abbildungen. VIII, 158 S. 1908. Geh. M 5.–, geb. M 5.80.

Inhaltsverzeichnis. I. Allgemeine Begriffe. 1. Richtung der Schwere. 2. Schwerpunkt. 3. Maß der Schwerkraft. — II. Der freie Fall. 1. Gesetze. 2. Die Schwere wirkt auf alle Körper gleich. 3. Fallmaschinen. — III. Allgemeine Schwere oder Gravitation. — IV. Das Pendel. 1. Mathematisches Pendel. 2. Physisches Pendel. 3. Spezielle Fälle. — V. Bestimmung der Intensität der Schwere durch Pendelmessungen. — VI. Absolute Messungen der Schwerkraft. 1. Fadenpendel. 2. Reversionspendel. — VII. Relative Schwerebestimmung. 1. Sternecksche Pendel. 2. Apparat von Defforges. 3. Andere Apparate. — VIII. Reduktion auf Meereshöhe. — IX. Die normale Schwerkraft in Meereshöhe. — X. Verteilung der Schwere auf der Erde, Konstitution der Erdrinde. — XI. Räumliche und zeitliche Veränderung der Schwerkraft, Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen. — XII. Einfluß der Schwerkraft auf die geometrischen Höhenmessungen. — Literatur. — Register.

Aus den Besprechungen.

Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. „Trotz der großen Bedeutung, welche die Schwerebestimmungen an der Erdoberfläche besonders in den drei letzten Jahrzehnten infolge der Vervollkommnung der Beobachtungs-Hilfsmittel und -Methoden gewonnen haben, ist doch die Theorie und Praxis der Messungen in weiten Kreisen so gut wie unbekannt geblieben. Hieran war zum Teil wohl Schuld, daß sich, so weit dem Referenten bekannt ist, in der vorhandenen Literatur kein geeignetes Buch für eine eingehendere, dabei aber keine größeren Ansprüche an die mathematische Vorbildung des Lesers stellende Einführung in das Gebiet der Schweremessungen findet. Diesem Mangel hilft das vorliegende Buch in glücklicher Weise ab..."



Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 28

Die Kraftfelder

Von **V. Bjerknes**, Professor der Mechanik und der mathematischen Physik an der Universität Christiania. Mit 29 Abbildungen. XVI, 174 S. 1909. Geh. M 7.—, geb. M 7.80.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. 1. Kapitel. Kinetischer Auftrieb. 2. Kapitel. Die Kraft gegen einen pulsierenden Körper. 3. Kapitel. Felder und Fernwirkungen pulsierender Körper. 4. Kapitel. Flüssigkeitsbewegungen, erzeugt durch die Impulse äußerer Kräfte. 5. Kapitel. Felder und scheinbare Fernwirkungen oszillierender Körper. 6. Kapitel. Grenzflächenbedingungen an Heterogenitätsstellen. 7. Kapitel. Heterogenes flüssiges System mit undurchdringlichen Körpern. 8. Kapitel. Umriß der Theorie der Vektorfelder. 9. Kapitel. Über schwingende Bewegungen. 10. Kapitel. Die Grundgleichungen des hydrodynamischen Feldes mit undurchdringlichen Körpern. 11. Kapitel. Hydrodynamische Kraftfelder mit durchströmten Körpern. 12. Kapitel. Kraftfelder in flüssigen Medien mit gyrostatischen Eigenschaften.

Aus den Besprechungen.

Annalen der Elektrotechnik. „Seit der Zeit Newtons pflegten die Physiker ihren Erklärungen der physikalischen Erscheinungen durchgehends die Vorstellung von Fernwirkungen zugrunde zu legen. Erst Faraday stellte dieser Auffassung die Idee des Kraftfeldes gegenüber. Nach ihm legte Maxwell in seinen berühmten Gleichungen die formalen Beziehungen des elektromagnetischen Kraftfeldes zu Raum und Zeit fest. Diese Theorie Maxwells erhielt durch die klassischen Versuche von H. Hertz eine glänzende Bestätigung, die den Erfolg hatte, daß von jetzt ab die Vorstellung von Kraftfeldern die Fernwirkungshypothese vollständig verdrängte. Was uns die Maxwellsche Theorie in endgültiger Form gegeben hat, ist aber nur die formale Beziehung der elektrischen und magnetischen Vektorgrößen zu Raum und Zeit. Über die innere Natur der Kraftfelder weiß man auch durch sie nichts Näheres. Das hier vorliegende Buch enthält in übersichtlicher Zusammenstellung die Resultate einer langen Reihe von Forschungen, welche unternommen sind mit dem Ziele, womöglich Licht auf diese dunkle Frage zu werfen. Unmittelbarer Gegenstand der Untersuchung sind nicht die elektromagnetischen Kraftfelder selbst, sondern ihnen analoge Felder, die in bewegten Flüssigkeiten und in Medien mit gewissen Elastizitätseigenschaften auftreten. Für das Studium dieser Felder hat der Verfasser neue Methoden geschaffen, welche eine einfache Ableitung der früher schwer zugänglichen Resultate gestatten. In sehr einfacher Weise entwickelt er die Theorie zweier Klassen von hydrodynamischen Felderscheinungen, der C. A. Bjerknesschen, wo schwingende, und der Euler-Kelvinschen, wo stationäre Bewegung der Flüssigkeit zugrunde liegt. Die bekannte, in beiden Fällen auftretende Analogie mit elektrostatischen oder magnetischen Feldern wird eingehend dargelegt, und die zur Verifikation der Resultate dienenden Versuche werden beschrieben. Als unmittelbare Fortsetzung dieser hydrodynamischen Untersuchung entwickelt der Verfasser die Theorie ähnlicher Kraftfelderscheinungen in Medien mit Elastizität der eigentümlichen gyrostatischen Art, welche Mac Cullagh zur Erklärung optischer, und Lord Kelvin zur Veranschaulichung elektrodynamischer Erscheinungen einführten und die nach ihnen viele Forscher benutzt haben, um mechanische Bilder der allgemeinsten elektromagnetischen Felderscheinungen zu konstruieren."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 29

Physiologie der Stimme und Sprache

Von **Prof. Dr. Hermann Gutzmann** *in Berlin.*

Mit 92 zum Teil farbigen Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. X, 208 S. 1909. Geh. M 8.— geb. M 9.—.

Inhaltsverzeichnis. I. Physiologie der Atmung und Stimme. A. Anatomische Vorbemerkungen. 1. Atmung. 2. Stimme. B. Die Atembewegungen beim Sprechen. 1. Registrierung der Atembewegungen. 2. Typus der normalen Sprechatmung. Registrierung des Atemvolumens beim Sprechen. C. Die Stimme. 1. Bildung der Stimme. 2. Tonhöhe und Tonstärke. 3. Register. 4. Genauigkeit der Stimme. 5. Stimmeinsätze. 6. Stimmlage und Stimmumfang. 7. Flüsterstimme u. Bauchrednerstimme. — II. Physiologie der Sprachlaute. A. Anatomische Vorbemerkungen. Der Aufbau des Ansatzrohres. B. Die Physiologie des Ansatzrohres: 1. Klanganalyse der Sprachlaute: a) Analyse der menschlichen Stimme durch einfaches Hören. b) Graphische Analyse der Klänge. c) Klangkurven. d) Analyse der Klangkurven. e) Resultate der Klanganalyse. f) Theorie der Vokale. g) Synthese der Vokale. h) Analyse der Konsonanten. 2. Formen und Bewegungen des Ansatzrohres: a) Analyse der Sprachbewegungen durch Beobachten. b) Analyse der Sprachbewegungen durch registrierende Instrumente: Akustische Registrierung; Optische Registrierung; Direkte Meßmethoden. c) Anwendung der Registrierung auf die einzelnen Bewegungen: Luftbewegung der Artikulation; Kehlkopfbewegungen; Unterkieferbewegungen; Zunge und Mundboden; Gaumensegel; Lippen. d) Apparate für die Gesamtaufnahme der Artikulationsorgane. e) Färbemethoden. 3. Die Sprachlaute: a) Vokale und Konsonanten. b) Die Vokale. c) Die Konsonanten: Verschlußlaute, Media und Tenuis; Reibelaute; *L*-Laute; *R*-Laute; Resonanten; Laute des vierten Artikulationssystems; Kehlkopflaute; Schnalzlaute (Clixe). d) Die Sprachlaute in der Verbindung: Doppelvokale und Doppelkonsonanten; Silbe, Wort, Satz. 4. Die Akzente der Sprache. 5. Die phonetische Schrift. — Literaturverzeichnis.

Aus den Besprechungen.

Berliner klinische Wochenschrift. „Wie sehr Verfasser den Gegenstand beherrscht, geht aus der Klarheit seiner Darstellungen hervor; die Schilderung der an sich oft recht schwierigen Forschungsmethoden und die Deutung der Resultate läßt dem Leser manches einfach und verständlich erscheinen, was in Wirklichkeit nur durch mühsame Arbeit klargelegt werden konnte. Das Literaturverzeichnis enthält 263 Nummern. Das Buch ist unentbehrlich für den Spracharzt, den Laryngologen und für den Physiologen, ferner für den Taubstummenlehrer, für den Gesangspädagogen und den Lehrer der Rhetorik; aber auch für die Philologen, Linguisten und Phonetiker enthält es viel Wissenswertes. Vielleicht bekehrt es auch den einen oder anderen jener rückständigen Philologen, welche die experimentelle Phonetik noch nicht als Wissenschaftszweig anerkennen wollen. Für jeden Arzt aber wird die Lektüre des Buches, dem wir ein glänzendes Prognostikon stellen, belehrend und genußreich sein."

Medizinische Klinik. „... Durch seine eingehende, durch zahlreiche eigene Spezialforschungen begründete Orientierung auf diesem Wissensgebiet ist in der Tat Gutzmann in hervorragender Weise berufen und befähigt, die Kernpunkte zu erkennen und herauszuheben und eine wirklich gute Darstellung dieser für den Arzt und den Psychologen, Physiologen und den Physiker gleich wichtigen Materie zu geben. Das Buch kann der Beachtung derjenigen, welche in diesem und den angrenzenden wissenschaftlichen Gebieten arbeiten, nur warm empfohlen werden."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 30

Die atmosphärische Elektrizität

Methoden und Ergebnisse der modernen luftelektrischen Forschung

Von H. Mache, a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien, und E. v. Schweidler, a. o. Prof. a. d. Universität in Wien.

Mit 20 Abbildungen. XI, 247 S. 1909. Geh. M 6.—, geb. M 6.80.

Inhaltsverzeichnis. 1. Kapitel. Das elektrische Feld der Atmosphäre. Allgemeine Eigenschaften des Feldes. Instrumentarium zur Messung des Potentialgefälles. Methode der Messung des Potentialgefälles am Erdboden. Reduktion auf die Ebene. Methode der Messung des Potentialgefälles im Ballon. Beobachtungsresultate. — 2. Kapitel. Die Elektrizitätsleitung der Atmosphäre. Coulombs Zerstreuungsgesetz. Der Elster-Geitelsche Zerstreuungsapparat. Grundzüge der Ionentheorie. Anwendung der Ionentheorie auf die Apparate zur Bestimmung der Leitung der freien Atmosphäre: 1. Der Elster-Geitelsche Zerstreuungsapparat mit Schutzzylinder. 2. Der Elster-Geitelsche Zerstreuungsapparat ohne Schutzzylinder. 3. Scherings Zerstreuungsapparat. 4. Gerdiens Aspirator. Beobachtungsresultate: a) Zerstreuungsbeobachtungen mit Schutzzylinder; b) Zerstreuungsmessungen mit freistehendem Zerstreuungskörper; c) Absolute Messungen des Leitvermögens. — 3. Kapitel. Die Ionen der Atmosphäre. Ionenzahl, Eberts Aspirator. Ionenbeweglichkeit. Wiedervereinigung der Ionen (Molisierung). Adsorption und Diffusion der Ionen. — 4. Kapitel. Die Ionisatoren und Elektrisatoren der Atmosphäre. A. Elektrisierung und Ionisierung beim Zerspritzen von Wasser in Luft. B. Elektrisierung durch die Emission von Elektronen von belichteten Oberflächenteilen der Erde. Lichtelektrische Aktinometrie. C. Ionisierung durch ultraviolettes Licht. D. Ionisierung durch Becquerelstrahlung: a) Die radioaktiven Substanzen; b) Das Vorkommen radioaktiver Substanzen auf der Erde und in der Atmosphäre: I. Allgemeine Verbreitung radioaktiver Substanzen im Erdboden; Radioaktivität von Gesteins- und Erdarten; Radioaktivität der Bodenluft; Radioaktivität der Quellen. II. Vorkommen radioaktiver Emanationen und deren Zerfallsprodukte in der Atmosphäre. III. Die Bedeutung der radioaktiven Substanzen für die Ionisation der Atmosphäre. — 5. Kapitel. Elektrische Strömungen in der Atmosphäre. A. Der normale vertikale Leitungsstrom. B. Der durch die Zerfallsprodukte des Radiums und Thoriums getragene Strom. C. Konvektionsströme durch Luftbewegung. D. Konvektionsströme durch Niederschläge; Wilsons Kondensationstheorie. E. Summation der elektrischen Vertikalströme in der Atmosphäre. — 6. Kapitel. Leuchtende Entladungen in der Atmosphäre. A. Elektrische Gasentladungen im allgemeinen. B. Leuchtende Entladungen bei Gewittern: I. Die Entladungsformen bei Gewittern. II. Ionentheoretische Einordnung der natürlichen Entladungen. III. Die meteorologischen Bedingungen des Entstehens leuchtender Entladungen. C. Das Polarlicht. — 7. Kapitel. Theorien der atmosphärischen Elektrizität. — Literaturnachweis.

Aus den Besprechungen.

Elektrotechnische Zeitschrift. „In knapper, aber sehr klarer Form wird in diesem Buche geschildert, welcher Methoden sich die jetzige luftelektrische Forschung bedient, um die elektrischen Vorgänge in der Atmosphäre zu untersuchen, welche Ergebnisse allgemeinen Charakters dabei gewonnen wurden und welche Voraussetzungen theoretischer Natur sich als heuristisch wertvoll erwiesen haben..."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 31

Das Klimaproblem der geologischen Vergangenheit u. histor. Gegenwart

Von **Dr. Wilh. R. Eckardt**, *Assistent am meteorolog. Observatorium und der öffentl. Wetterdienststelle Aachen.*

Mit 18 Abbildungen und 4 Karten. XI, 183 S. 1909. Geh. M 6.50, geb. M 7.10.

Inhaltsverzeichnis. Das Klimaproblem der geologischen Vergangenheit und historischen Gegenwart. Einleitung: Zweck und Bedeutung des Gegenstandes. Das Verhältnis der Geographie zu den Naturwissenschaften, insbesondere zur Geologie. Die Bedeutung der Ergebnisse der geologischen Forschung für die Geographie. Die Klimatologie. — Die Bodenbildung unter dem Einflusse des Klimas: Die mechanische Zerstörung des festen Gesteins. Die chemische Zersetzung desselben. — Das Klima der geologischen Vergangenheit. — Das Klima im Paläozoikum. — Die präkarbonen Perioden. — Das Karbon. — Die permokarbone Eiszeit und die Glossopterisflora. — Das Klima im Mesozoikum, besonders in der Jura- und Kreideperiode. — Das Klima in der Tertiärzeit. — Die diluviale Eis- oder Schneezeit. — Die Änderungen des Klimas in historischer Zeit, insbesondere das Austrocknungsproblem. — Der Einfluß des Waldes, bzw. einer Vegetationsdecke auf das Klima und den Wasserabfluß: a) Der Einfluß des Waldes auf die Temperaturverhältnisse. b) Der Einfluß des Waldes auf die Niederschläge. — Die Klimaschwankungen; Klima und Wirtschaft. — Die allgemeine Konstanz des heutigen Klimas. — Wichtige Aufgaben der Meteorologie und Klimatologie. — Literaturangaben.

Aus den Besprechungen.

Globus. „Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Klimate der geologischen Vergangenheit nicht, wie es nach seiner Ansicht seither fast nur geschehen, von rein geologischem Standpunkt, sondern von der allgemein naturwissenschaftlichen Seite zur Darstellung zu bringen. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß die gesamten klimatischen Änderungen der geologischen Vorzeit, die in großen Zügen dargestellt werden, sich aus rein meteorologischen Verhältnissen erklären lassen, die ihrerseits wieder als Folgen von Polverschiebungen infolge geologischer Veränderungen auf der Erde aufgefaßt werden. Eine periodische Wiederkehr von Kältewellen im Permokarbon, Diluvium usw. sowie eine gleichmäßige Temperierung in früher Zeit und erst spätere Differenzierung der Klimate wird abgelehnt und dagegen behauptet, daß schon von früher Zeit her Zonen auf der Erde bestanden, wenn ihre Unterschiede vielleicht auch zeitweise nicht so ausgeprägt waren wie heute. Der Abschnitt über die Änderungen des Klimas in historischer Zeit behandelt vor allem den Einfluß des Waldes auf das Klima bzw. den Zusammenhang dieser beiden. Eine Klimaänderung seit historischen Zeiten ist nach Eckardt nicht nachweisbar. Der Schlußabschnitt weist kurz auf die außerordentliche Wichtigkeit der Erforschung der klimatologischen Bedingungen des Pflanzenwuchses sowie sonstiger klimatologischer Beobachtungen hin. ."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 32

Lichtbiologie. Die experimentellen Grundlagen der modernen Lichtbehandlung

Zusammengestellt von **Dr. med. Albert Jesionek,**
Professor an der Universität Gießen. *VIII, 177 S. 1910. Geh. M 4.—, geb. M 4.80.*

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. Allgemeine Bemerkungen über das Licht. — Die Einwirkung des Lichtes auf die Pflanzenwelt. — Die Einwirkungen des Lichtes auf die Bakterien. — Die Reizwirkung des Lichtes auf Bakterien und andere Mikroorganismen. — Die photodynamische Erscheinung. — Einwirkungen des Lichtes auf höhere Tiere. — Einwirkung des Lichtes auf die Haut des Menschen: Sonnenbrand und Gletscherbrand. Erfahrungen der Polarfahrer. Hautentzündung durch elektrisches Licht. Experimentelle Untersuchungen von Widmarck, Hammer, Finsen. Physiologisches Verhalten der Haut. Hautröte. Hautpigment. Hornfarbe und Epidermistrübung. Haare. Tiefenwirkung. Penetrationsfähigkeit der einzelnen Strahlen. Penetrationsfähigkeit der ultravioletten Strahlen. Kleidung. Hitzschlag. — Die histologischen Veränderungen im belichteten Hautgewebe. — Das Licht als Ursache von Hautkrankheiten: Lichtentzündung. Schutzmaßnahmen. Hydroa aestivalis. Xeroderma pigmentosum. Sommersprossen, Warzen. Pellagra. Blattern. Rotlichtbehandlung. Lichtbehandlung nach Finsen. — Einwirkungen des Lichtes auf das Blut und auf den Stoffwechsel: Lichtregulierung. Quinckes und Behrings Experimente. Lumineszenz des Blutes. — Einwirkungen des Lichtes auf das Nervensystem: Experimente mit farbigem Licht. „Sinnlich-sittliche Wirkung" der Farben nach Goethe.

Aus dem Vorworte.

„... In diesem Werkchen beabsichtige ich nun keineswegs vom ärztlichen Standpunkte aus die verschiedenen Arten und Methoden der Lichtbehandlung in allen ihren Einzelheiten zu schildern und meine subjektiven Ansichten über den Wert und Unwert der verschiedenen lichttherapeutischen Bestrebungen ausführlich zu erörtern. Der Zweck meiner Ausführungen ist der, irrtümlichen Vorstellungen entgegen zu treten und denjenigen, die sich für diese Fragen interessieren, zu zeigen, daß sich die medizinische Forschung mit den Wirkungen des Lichtes auf die belebte Natur aufs eifrigste beschäftigt und bestrebt ist, aus dem Studium des Lichtes und seiner Eigenschaften für den kranken und für den gesunden Menschen möglichst viel Vorteil zu ziehen. Dabei habe ich es mir angelegen sein lassen, aus der reichhaltigen Fülle der Literatur nur diejenigen Arbeiten zusammenzustellen, welche in die Beziehungen des Lichtes zum Leben uns einen sicheren Einblick gewähren und hinsichtlich der praktischen Verwertung des Lichtes zu grundlegenden Ergebnissen geführt haben. Auch mag diese Darstellung dazu dienen, den Leser über die weitausgebreiteten Bahnen und oft verschlungenen Pfade zu unterrichten, auf welchen sich die lichtbiologische Forschung bewegt. Nicht die verschiedenen Arten der Lichtbehandlung selbst, sondern vielmehr ihre Grundlagen, die in den verschiedenen Gebieten naturwissenschaftlicher Erkenntnis wurzeln, bilden den Gegenstand unserer Betrachtungen."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Die Wissenschaft Sammlung naturwissenschaftl. und mathematischer Einzeldarstellungen Heft 33

Die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Legierungen

Von **Bernhard Dessau**, a. o. Professor der Physik an der Universität Perugia. Mit 82 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. VIII, 208 S. 1910. Geh. M 7.—, geb. M 8.—.

Inhaltsverzeichnis. I. Einleitung. — II. Allgemeines über Zweistoffsysteme. § 1. Heterogene Gleichgewichte. § 2. Gegenseitige Löslichkeit zweier Stoffe. § 3. Erkaltungs- und Erwärmungskurven. Schmelzdiagramme eines Zweistoffsystems ohne chemische Verbindungen und polymorphe Umwandlungen, mit vollständiger Mischbarkeit der Komponenten im flüssigen, vollständiger Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande. § 4. Die Komponenten des Systems bilden miteinander eine unzersetzt schmelzbare chemische Verbindung, die im kristallisierten Zustande mit den Komponenten nicht mischbar ist. § 5. Die Verbindung schmilzt unter Zersetzung. § 6. Die Komponenten des Systems bilden keine chemische Verbindung, sind aber sowohl im flüssigen wie im kristallisierten Zustande in allen Verhältnissen miteinander mischbar. § 7. Die Komponenten sind im kristallisierten Zustande schon bei der Schmelztemperatur nur beschränkt ineinander löslich. § 8. Beschränkte Mischbarkeit im flüssigen Zustande. § 9. Polymorphe Umwandlungen. — III. Untersuchungsmethoden. § 1. Thermische Analyse. § 2. Metallographie. § 3. Dilatometrische und kalorimetrische Methoden. — IV. Binäre Legierungen. § 1. Legierungen ohne chemische Verbindung der Komponenten. § 2. Binäre Legierungen mit Verbindungen. § 3. Verbindungsfähigkeit und Isomorphismus der Metalle. — V. Ternäre Legierungen. — VI. Die gewerblich wichtigsten Legierungen. § 1. Eisen und Kohlenstoff. § 2. Legierungen des Kupfers. — VII. Die physikalischen Eigenschaften. § 1. Mechanische und thermische Eigenschaften. § 2. Elektrische Leitfähigkeit. § 3. Der Magnetismus der Legierungen. § 4. Elektrolytische Lösungstension und elektromotorische Kraft. — Register.

Aus dem Vorwort.

„Die Zahl der Untersuchungen über die Konstitution und die Eigenschaften der Legierungen ist in den letzten Jahren so sehr angewachsen, daß der Überblick für denjenigen, der sich nicht speziell mit dem Gegenstande beschäftigt, immer schwieriger wird. Und doch bietet gerade dieses Kapitel der physikalischen Chemie nicht nur für die Chemiker und Technologen, von denen die wissenschaftliche Erforschung desselben in erster Linie betrieben wurde, sondern auch für den Physiker ein hervorragendes Interesse. Der Versuch, das einschlägige Material zusammenfassend darzustellen, bedarf darum kaum einer Rechtfertigung. Der jetzige Zeitpunkt erschien hierfür um so geeigneter, als die Klarlegung der Konstitution der binären Legierungen dank den Arbeiten Tammanns und seiner Schüler gegenwärtig zu einem gewissen Abschlusse gediehen und damit auch für das Studium der Legierungen von mehr als zwei Komponenten, sowie für die systematische Bearbeitung des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Eigenschaften und der Konstitution der Legierungen erst die rationelle Grundlage gewonnen ist. In dieser Hinsicht mag die vorliegende Arbeit auch zu weiterer Forschung anregen, wenngleich begreiflicherweise die Originaluntersuchungen weder alle berücksichtigt, noch in Form von Literaturangaben sämtlich erwähnt werden konnten. Vollständigkeit wurde nur insofern angestrebt, als die verschiedenen Typen, denen man bei der Untersuchung der Konstitution der Legierungen begegnet, an charakteristischen Beispielen erläutert wurden..."

Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig